TÉCNICA

115

1940

REVISTA DE ENGENHARIA
dos alunos do I.S.T.

DEZEMBRO

Do **MINHO** à **BEIRA LITORAL**

as **FÁBRICAS,**
CIDADES,
VILAS e
ALDEIAS PORTUGUESAS

têm

ELECTRICIDADE

para **fôrça motriz, todos os usos industriais, luz,** etc.
a **TARIFAS MUITO VANTAJOSAS,**
com as mais amplas **facilidades,**

fornecida pela

UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA

produzida na CENTRAL : **TERMICA** do FREIXO (22.000 CV.)
: **HIDRÁULICA** do LINDOSO (40.000 CV.)

CIMENTO TEJO
TIPO PORTLAND
COMPANHIA "CIMENTO TEJO"
FÁBRICA EM ALHANDRA PORTUGAL SEDE EM LISBOA

CIMENTO TEJO

FÁBRICA EM ALHANDRA

A instalação mais moderna do País. Dois fornos rotativos em laboração. — O "CIMENTO TEJO" marca pelas suas altas resistências e regularidade, garantidas pela fiscalização contínua de tôdas as fases do fabrico, exercida por técnicos portugueses especializados.

Pedidos à Companhia **"CIMENTO TEJO"**

SEDE EM LISBOA
RUA DA VITÓRIA, 88, 2.º

FILIAL NO NORTE
AV. DOS ALIADOS, 20, 3.º
PORTO

NÚMERO
115
Dezembro — 1940

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA
DOS
ALUNOS DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Redacção e Administração: AV. ROVISCO PAIS, IST / LISBOA-N. / TEL. 49144 (linha 50)

DIRECTOR
CARLOS KRUS ABECASIS
ADMINISTRADOR
NUNO ABRANTES
BIBLIOTECÁRIO
LUIS DE ALMEIDA ALVES
CORPO REDACTORIAL
Vasco Mendes de Sousa
José Faria da Fonseca Santos
Militão Rosa Pereira
Silvério da Silva

PREÇO DÊSTE NÚMERO 10$00

ASSINATURAS:

	3 N.os	6 N.os	12 N.os
Continente e Ilhas	12$00	23$00	44$00
Colónias Portuguesas e Espanha...	—	30$00	55$00
Estrangeiro...	—	40$00	70$00

EDITOR E PROPRIETÁRIO
ASS. DOS ALUNOS DO I. S. T.

COMPOSTO E IMPRESSO
NAS
OFICINAS FERNANDES
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

Capa — Com fotografias de Mário Novais.

		Págs
Presença	Direcção da «Técnica»	41
Congresso de história da actividade científica portuguesa	Dr. Mira Fernandes (Professor do I. S. T.)	43
Energia magnética, momento e estados de equilíbrio livre da máquina assíncrona	C. Ferrer Moncada (Professor do I. S. T.)	52
A fotoelasticidade nos equilíbrios elásticos de revolução	Eng. Civil (I. S. T.) Manuel Rocha	65
Movimento permanente gradualmente variado — Estudo Geral do Regolfo	Eng. Civil (I. S. T.) Alberto Abecasis Manzanares	74
A dosagem dos betões, nos estaleiros, utilizando um método gráfico	Eng. Civil (U. P.) D. M. Vieira Barbosa	91
Algumas considerações sôbre as pontes de arcos e abóbadas	Eng. Civil (U. P.) Edgar Cardoso	100
A acção catalítica do ácido clorídrico concentrado sôbre a hidrólise do acetato de metilo	Dr. Artur de Sousa	110
Publicações recebidas		119

RÁDIO
TELEFONES
CABOS

Standard Electrica

FORNECEDORA DO GOVÊRNO PORTUGUÊS

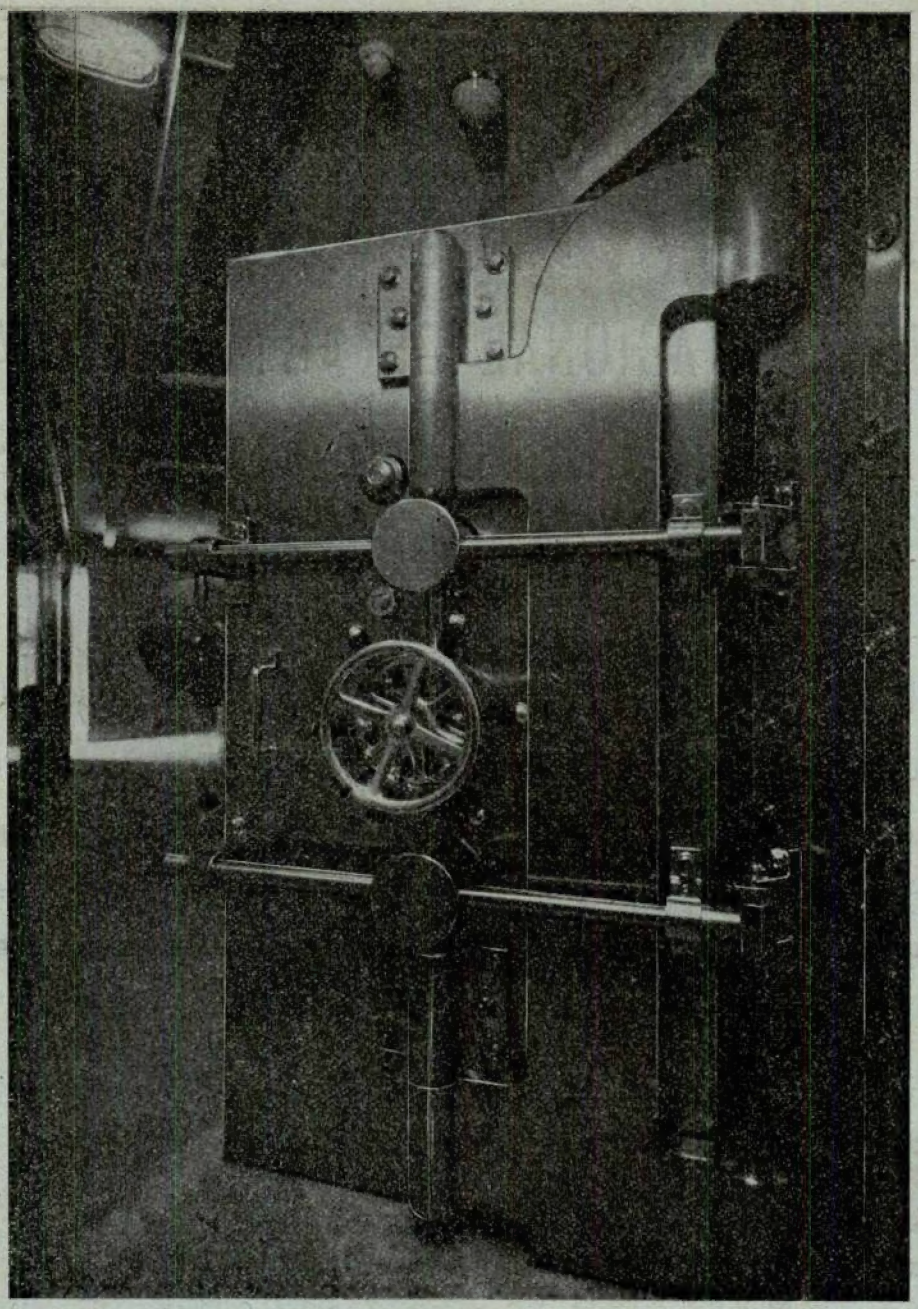
APARELHOS DE MEDIDA WESTON

RECTIFICADORES DE SELÉNIO

Praça dos Restauradores, 47, 1.º

LISBOA

Telef. P. B. X. 25890 e 26165



FÁBRICA PORTUGAL

Cofres e Casas fortes

NAS OBRAS COMEMORATIVAS DOS CENTENÁRIOS DA

SÉ PATRIARCAL

MUSEU NACIONAL DE ARTE ANTIGA
EXPOSIÇÃO DO MUNDO PORTUGUÊS
TEATRO S. CARLOS

A **SOCIEDADE INDUSTRIAL METALURGICA** R. L. COLABOROU COM TRABALHOS DE SERRALHERIA DE ARTE E DE CONSTRUÇÃO

OFICINAS E ESCRITÓRIO: Rua de S. Tiago, 13 — LISBOA — Telef. 2 6572

CIMENTO

"TEJO"

Em sacos de papel ou de juta
Em barricas

CANTARIAS E MÁRMORES
JAZIGOS

António Moreira Rato & Filhos, Ltd.ª

AVENIDA 24 DE JULHO, 54-F // LISBOA // TELEFONE 2 6980

EMPRÊSA DE CIMENTOS DE LEIRIA

BARRICAS • SACOS DE JUTA • SACOS DE PAPEL

CIMENTO «LIZ» HIDROFUGADO «N»

PRÓPRIO PARA

IMPERMEABILIZAÇÃO DE OBRAS

REBOCOS, FUNDAÇÕES, PAREDES, ETC.

Substitui com vantagens de ordem técnica e económica todos os impermeabilizadores conhecidos

EM SACOS DE PAPEL DE 50 QUILOS

PEÇAM INSTRUÇÕES PARA O SEU EMPRÊGO

SEDE:

Rua do Cais de Santarém, 64, 1.º

LISBOA

FILIAL NO NORTE:

Rua 31 de Janeiro, 190-A, 1.º

PORTO

AGENTES EM TODO O PAÍS

CIMENTO SECIL

Fabricado pelos mais modernos processos e preferido para todos os trabalhos de responsabilidade.

Sacos de papel ou de juta com 50 Kg. — Barricas de 180 Kg.

SECIL COMPANHIA GERAL DE CAL E CIMENTO

RUA DO COMÉRCIO, 56, 3.º // LISBOA

Sondages. Etanchements. Consolidations "Procédés Ródio"

Sondagens geológicas

Estudo da resistência e permeabilidade de terrenos; laboratório geofísico

Consolidação e impermeabilização de terrenos e alvenarias por meio de injecções de cimento, produtos químicos, emulsão betuminosa Shellperm, etc.

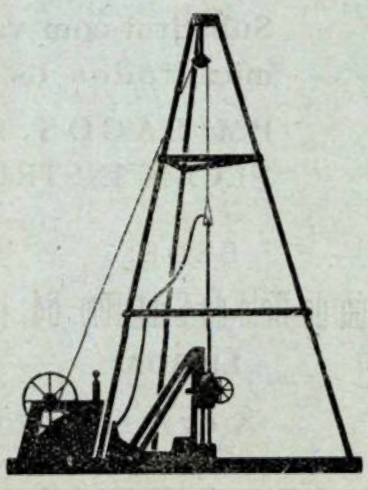
Estacas de beton armado, sistema **Ródio** sem fazer trepidar o solo

Rebocos comprimidos por «cement gun»

Fundações em terrenos difíceis por congelação artificial, ou baixando o nível da água friática.

Sociedade Anónima com séde em PARIS

As melhores referências no paiz e no estrangeiro



Engenheiro delegado para Portugal

Walter Weyermann

P. do Município, 32-2.º--LISBOA Tel. 2 8685

À QUELES QUE, EM TODOS OS CAMPOS E MAIS ESPECIALMENTE NO DA ENGENHARIA, SERVIRAM A PÁTRIA PORTUGUESA, DEDICA A «TÉCNICA» O SEU NÚMERO COMEMORATIVO DOS CENTENÁRIOS DA FUNDAÇÃO E RESTAURAÇÃO DA NACIONALIDADE

TÉCNICA

CARLOS KRUS ABECASIS
DIRECTOR

ANO XVI - N.º 115 DEZEMBRO 1940

PRESENÇA

Porque, acima de engenheiros, queremos e nos orgulhamos de ser portugueses, mal pareceria que faltasse, na apoteose das Comemorações Centenárias, um sinal da nossa presença, da nossa existência no seio da grande Família Portuguesa, em justificada festa neste Ano Jubilar da Nacionalidade.

Esta a razão do nosso número especial. *Brinde oferecido a Portugal pelas suas escolas de Engenharia, não carece êle de mais justificação quanto ao seu aparecimento.*

Algumas palavras apenas sôbre a feição que entendemos dever dar-lhe.

Hora grande na história da Humanidade são os nossos dias. A quem a vive — povos ou indivíduos — impõe-se, como condição de subsistir, o não lhe ser inferior em nenhum dos campos da sua actividade, em nenhum dos aspectos da sua vida.

E tal resultado há-de ser conseguido à custa de inabalável vontade de servir — a prol do comum — em todos os ramos da vida nacional. Nas horas decisivas que passam, mal das nações em que todos, do Chefe ao mais humilde dos cidadãos, não cumpram os seus deveres, dedicadamente, entusiàsticamente, até ao sacrifício de si proprios.

Mas há mais. Hoje, uma afirmação de vitalidade quási implica, para ser acreditada, a manifestação dum poder criador, imposto, afinal, aos que quiserem sobreviver, pela extraordinária velocidade a que se vive a vida. E assim é que fórmulas e métodos ainda ontem em alta cotação, têm de ser hoje inteiramente postos de parte por inúteis, quando não prejudiciais.

Aplicada ao nosso caso, esta é a razão por que entendemos dar ao número especial da «Técnica» uma forma diferente da consagrada habitualmente para tais números, em que mais se não faz do que recapitular, nas já clássicas entrevistas de personagens importantes, algumas das obras já feitas, a mor parte das vezes sem qualquer mérito original; a par disto, os inevitáveis retratos, homenagens, etc. — tudo a encher papel.

Rumo novo tomámos, pois. O nosso número especial é constituído apenas por trabalhos que, sem favor, podem classificar-se de real mérito — pelos assuntos tratados ou pelo modo interessante de os expor — no campo da Ciência ou da Técnica. Trabalhos que, em nome dos seus autores — Professores e Assistentes, alunos e antigos alunos do I. S. T. e da F. E. U. P. — se oferecem a Portugal, no oitavo centenário do seu aparecimento para uma vida repleta de glórias e que nós queremos cada vez mais gloriosa.

Certo é ter o número ficado àquem dos nossos desejos ao projectar a sua publicação. Contudo, há-de reconhecer-se que para dois ou três meses de preparação — tanto tiveram os mais

felizes *dos autores — é já apreciável o esfôrço feito, especialmente como garantia do que, em futuro próximo, queremos e havemos de fazer.*

Sirva êle, portanto, para provar à Nação terem os seus engenheiros consciência das responsabilidades de primeira ordem que lhes cabem na melhoria das condições de existência e prosperidade de Portugal e dos Portugueses.

Bem sabemos que, na hierarquia dos valores humanos, não é a Técnica a ocupar o primeiro lugar, pois nem só de pão vive o homem... Isso, porém, não pode ser motivo para não cumprirmos o que julgamos ser o nosso dever.

Assim o façam todos os portugueses de tôdas as posições sociais. Fazendo-o, não nos parecerá demasiado o pêso de oito séculos duma História, bela e gloriosa entre as mais belas e gloriosas da Terra. E então, sim, confiadamente, podemos esperar que uma nova era de prosperidade e grandeza se avizinha, fruto do trabalho conjugado de todos nós, no aproveitamento das riquezas de que a natureza dotou Portugal d'àquém e além mar, e, sobretudo, no aproveitamento dessas outras riquezas, do mundo do Espírito, que constituem a maior fôrça da Pátria: a nossa Alma Nacional.

Nesta obra enorme, já em pleno andamento, conhecemos, os engenheiros e futuros engenheiros de Portugal, qual é o nosso lugar. Não podíamos, pois, deixar de dizer — presentes!

A acabar, duas palavras de sincero agradecimento.

A primeira, a todos os colaboradores dêste número da «Técnica». A êles, muito mais de que a nós, se deve o que foi possível realizar-se. Pela sua solicitude, pelo seu carinho, pelo seu entusiasmo pela nossa Revista e por êste seu número especial, amplamente compensaram todos os esforços, tôdas as fadigas, tôdas as contrariedades (e não poucas foram) que, como organizadores, tivemos de suportar. Pena foi não podermos contar, entre os colaboradores de hoje — por circunstâncias independentes da nossa vontade e da dêles — alguns dos mais ilustres nomes do nosso Professorado, tantas vezes honra de nossas páginas.

E, agora, a segunda palavra de agradecimento: a todos os engenheiros dos serviços oficiais, amigos sinceros da «Técnica», por nós importunados e que, facultando-nos as suas colecções de fotografias, nos permitiram publicar, nas nossas páginas gráficas, tão belos documentos da obra grandiosa a que a Engenharia portuguesa lançou ombros, e pela qual bem merece da Nação.

Uns e outros, portanto, bem hajam!

A Direcção da "Técnica"

Congresso de história da actividade científica portuguesa

(Coimbra, Novembro de 1940)

ORAÇÃO INAUGURAL

PELO DOUTOR MIRA FERNANDES

(Professor do I. S. T.)

Disse Leopardi que *é mais fácil fazer vingar uma ideia nova do que levantar um edifício novo sôbre as ruínas dum êrro.* E assim é. Da *ideia nova* será difícil fortalecer os alicerces, acreditar os méritos, confirmar o alento, conseguir o aplauso; mas a incerteza do seu triunfo não é, a cada passo, engrandecida pela contingência duma rehabilitação; nem a sua marcha é perturbada por suspeita original. Cito êste conceito de Leopardi, como afirmação de fé no êxito da *ideia nova* que aqui nos troúxe; *nova,* porque é êste o primeiro Congresso que em Portugal se realiza com êste intuito; e *nova* ainda porque o seu empreendimento revela juventude espiritual: o *quantum* de juventude que é inseparável da curiosidade. E quando essa curiosidade visa o nosso próprio passado, na intenção de alumiar o futuro, o desígnio de a satisfazer não tem apenas juventude, tem também disciplina; aquela disciplina de espírito sem a qual pode, às vezes, surgir uma criação de génio, mas cuja ausência dificilmente permite a gestação duma frutuosa norma de trabalho.

Acolhe-nos carinhosamente a egrégia Universidade de Coimbra e ninguém ousará negar o seu interêsse pela sorte dêste Congresso, tão ligados andaram sempre os seus destinos aos da actividade científica nacional, por intermédio dos que nela ensinaram e dos que nela aprenderam; pelos seus exemplos e pelos seus ensinamentos; pela sua posição e pela sua fôrça. Destinos assinalados pelas mesmas causas e procedentes da mesma origem; agora obscurecidos pela mesma sombra e logo iluminados pelo mesmo esplendor.

Ao desempenhar-me da incumbência, que tão imerecidamente me foi confiada pelo seu Venerando Prelado, de proferir esta oração inaugural, saúdo nêle, meu querido condiscípulo de há mais de trinta anos, a nossa velha Escola. Saúdo-a *em bloco:* nos seus mestres e nos seus alunos; nas suas tradições de tempos idos e nos seus desígnios de novos dias; no seu passado, ao qual pertenceu, durante 140 anos, após a reforma pombalina, a Faculdade, em má hora extinta, em que me formei; e no seu presente, onde vejo alvorecer, em profundos conceitos e nobilíssimas aspirações, há pouco tempo formulados pelo seu Ilustre Reitor, a aurora duma *era* nova na vida universitária.

Meus Senhores:

É de Galois a afirmação de que a *verdade científica é quási sempre atingida aos encontrões.* Queria êle dizer que, sendo numerosíssimas as combinações possíveis de ideias e factos, não há regras para determinar as combinações interessantes; aquelas que pela sua fecundidade vêm engrandecer o patri-

mónio científico. A escolha dos elementos que hão-de concertar-se num conúbio afortunado, obra da intuïção ou do acaso, é, por isso mesmo, uma das mais melindrosas e difíceis missões do investigador. E daí resulta essa torturante ansiedade que tem sido sempre a gestação do conhecimento. Advirta-se ainda, que tôda a pesquiza é feita sôbre conjuntos que se encontram em permanente transformação, instáveis na sua estrutura, incertos nos seus limites, e compreender-se-á a razão porque o *definitivo* e o *perfeito* foram banidos dos domínios do saber. Banidos, mas não por unanimidade de sufrágios. «*Todos os grandes físicos,* diz Planck, *acreditaram na realidade da sua imagem do mundo.*» E eu acrescentarei que esta ilusão, sempre renovada, tem, pelo menos, a virtude de ser, para a Ciência, uma fonte de Juvénia, e, para o espírito criador, a ambicionada porciúncula da imortalidade.

Tal atitude, porém, valoriza, cada vez mais, a inquirição do passado, em todos os campos doutrinários, já com o desígnio de meditar sôbre as causas do progredir, já com o intuito de reflectir sôbre as maneiras de aperfeiçoar. Estas razões justificam o grande incremento que a história da Ciência tem tido nos últimos tempos. Prescrutando o abrolhar duma ideia, ou dum processo experimental, acompanhando o seu evoluir, ponderando os seus desalentos, ou constatando os seus triunfos, colhem-se freqüentemente preciosos ensinamentos que podem utilizar-se, com proveito, na supressão duma dúvida, na orientação dum raciocínio ou dum método, concernentes a um domínio, por vezes diverso e que interessa, de momento, elucidar.

Seja ou não a História a mestra da Vida, a história da ciência é com certeza um guia prudente e industrioso da especulação. E porque assim é, julgou-se adequada esta hora solene da nossa nacionalidade para fazermos, nesse particular, um exame de consciência.

Não pode acoimar-se de vaidosa a comemoração que êste Congresso pretende fazer da Actividade científica portuguesa. Nem de inoportuna. Nem de supérflua. Não há vaidade em recordar, acentuando precedências, realçando originalidades de doutrina ou de método, insinuando divergências de critério ou prioridades de interpretação, registando correcções do raciocínio ou aperfeiçoamentos da experiência, o pouco ou muito que a ciência deve ao labor nacional. Se é muito, que se não malbarate; se é pouco, que se não perca. Se é muito, que se não deslustre nem diminua a grandeza do nosso esfôrço; se é pouco, que se não esqueça o magro óbolo da nossa pobreza. E, sendo muito ou pouco, nem, por ser de todos, há vaidade em confirmar que é nosso; porque essa confirmação, como um certificado de origem, é ainda um acto de honesto labor científico.

Também não é inoportuna esta comemoração. Engrandecido, dia a dia, o património do saber humano, em acelerada marcha de vertiginosas perspectivas, por afanosa competência de conceitos geniais e maravilhosa destreza de processos; confinado, cada vez mais, por imprescindíveis necessidades de domínio, o campo de acção de cada investigador, embora êsse domínio imponha, por insuprível dependência, facilidades de movimento, cada vez maiores, noutros campos afins; reduzidas, portanto, as possibilidades duma cultura histórica extensa e profunda, mesmo dentro da disciplina científica que a cada um interessa; é oportuno lembrar, em segura e demonstrativa informação, em coordenado e acessível resumo, como o farão as Actas dêste Congresso, aquilo que nos pertence. Mas há mais. Analogias de conceitos, por vezes meramente formais, semelhanças de estrutura, encontros ocasionais do raciocínio ou da experiência, identidades de algoritmo, dia a dia aproximam, aparentando, quando não fundindo, domínios do pensamento até aí supostos estranhos e independentes. Dêsse progredimento no sentido duma unidade, que exige, quási sempre, novas concepções, resulta, por via de regra, um acréscimo de simplicidade e de clareza.

A constatação dum acidente, que passara despercebido, o exame duma excepção, a descoberta duma singularidade, uma va-

riante nas condições experimentais, dão resposta a uma multidão de preguntas a que anteriormente só se sabia responder em campos díspares do conhecimento. E assim, torna-se desnecessária a análise que, nesses campos, conduziu a essas conclusões. Há teorias que podem hoje ser percorridas, até às suas mais recentes conquistas, em menos tempo do que levava, alguns anos atrás, o estudo dalgum dos seus capítulos. *Percorridas,* disse eu: o que não quere dizer que êsse percurso, por vias seguras e de menor extensão, tenha sempre o valor elucidativo dum levantamento topográfico. À margem do caminho que hoje é de aconselhar aos estudiosos, por ser o mais perfeito e o mais curto, às vezes a distância, passam despercebidas, aqui e além, balisas fundamentais da marcha de antigos pioneiros; e entre essas, algumas haverá que são nossas. Póde não ter havido invenção, mas presságio; ou nem sequer presságio, mas apenas o impulso inicial duma derrota feliz do pensamento, a inspiração dum tema fecundo, o motivo duma criação valiosa. Quer tenham sido, essas balisas, sinais dum primeiro reconhecimento, incompleto e grosseiro, quer tenham sido marcas fundamentais de referência duma construção acabada, embora não definitiva, importa que se não olvidem os seus méritos ocasionais, que se não ignorem os seus serviços à causa da ciência, e também ainda que se não consinta a contestação da sua precedência ou da sua origem. E não faltam, neste particular, acérrimos pleitos a derimir, alguns em segunda e terceira instância, sôfregas ambições a refrear, fantasiosas lendas a rebater. Por isso, eu dizia que esta comemoração não é supérflua.

No entanto, muitos dizem, e alguns creem sinceramente, que desta peregrinação por antigas conquistas do pensamento, desta romaria por velhos baluartes e desmanteladas cidadelas do saber, embora com o nobre intuito de coordenar, ou por uma simples aspiração de cadastro, escassos proveitos poderão resultar para o progresso dos conhecimentos humanos. São tão numerosos, tão cheios de curiosidade, tão dignos da nossa atenção e do nosso esfôrço os temas que importa esclarecer, são tão prementes as aspirações de prosseguir e tão relevantes os motivos de acrescentar, que mal pode aplaudir-se um dispêndio de actividades, que seriam preciosas como agentes de criação, na frívola e desvaliosa emprêsa de arrumar o passado. Será assim? Ou será, por vezes, dêsse exame profundo e atento de teorias e métodos, da crítica dos seus êxitos e percalços, do confronto dos seus domínios, que resultam iniciativas fecundas e felizes inspirações? Não serão as estruturas de certas construções antigas, dalgumas até que a sorte não bafejou, modelos úteis, sugestões acertadas, paradigmas proveitosos, em determinados passos da elaboração científica? Numerosos exemplos mostram que sim. Lembrarei apenas a teoria das funções fuchsianas de Poincaré, apoiada nos moldes das geometrias não euclideanas; o regresso à concepção emissiva, na teoria dos fotões de Einstein; e abundantes reminiscências do *Opus Majus* de Rogério Bacon, nas modernas teorias da Escola de Viena.

Quere dizer: pode o espírito criador, sem outras preocupações que não sejam as de fazer progredir o saber humano, confinado nos estreitos limites duma especialização, por vezes ingente, dar vida e perdurável consistência a doutrinas e a métodos que, de certo modo, se aparentam com outros que se criaram no passado, com êxito ou sem êle, e de cuja existência, por estreiteza de cultura, êsse espírito criador não tinha conhecimento. Mas, se os conhecesse, talvez a semelhança lhe tivesse ocorrido, abreviando e facilitando a sua tarefa de investigador. Sòmente, essa extensão de cultura (e não apenas a de sabor histórico, mas ainda a de carácter actual) é cada vez mais rara e mais difícil de conseguir. Não pode contestar-se que ela é um precioso adjuvante da capacidade criadora, embora, bem entendido, a não possa suprir. E mesmo êsse auxílio que o conhecimento anterior pode dar à construção nova só é profícuo se o conhecimento fôr manejado com a maior destreza e recordado com a maior oportunidade; se a máquina de pensar não

tiver hesitações no estabelecimento dos precisos contactos. Sem essa faculdade (e perfeita só a tem o génio) a extensão cultural pode ser apenas *um pêso morto.*

Nem todos têm, além disso, os mesmos prazeres espirituais. Há os que não dispensam a visão panorâmica da ciência, a que serve necessàriamente de base a vastidão e profundeza dos conhecimentos. Há os que preferem a realização dum progresso, embora minúsculo, nos domínios da investigação. Para os primeiros, tôda a limitação de apanágios é um cárcere insuportável, tôdas as demasias de especialização são intoleráveis algemas. Para os segundos, a paisagem não tem interêsse primacial, seduzindo-os, mais que tudo, a incursão para além das fronteiras do desconhecido. Os primeiros são sibaritas da sabedoria; os segundos são pioneiros audazes do descobrimento. À primeira atitude corresponde principalmente uma satisfação pessoal; à segunda, uma promoção de valores. Uma e outra são necessárias; e só o génio pode dispensar-se (e, ainda assim, cada vez menos) de manifestar predilecções por qualquer delas. O potencial criador revela-se na capacidade de esclarecer o que parecia confuso, no poder de generalização, na afirmação de analogias entre conceitos que pareciam distintos, na perícia de dar realce ao que é fundamental e valioso. Mas quási sempre as criações verdadeiramente grandes, aquelas que determinam inesperadas derrotas do pensamento científico, novos quadros do conhecimento, imprevistas aspirações do espírito, talvez porque o génio as produziu, inculcam larga visão e dilatadas perspectivas. Aquelas perspectivas a que não falta, quási nunca, a informação histórica dos primitivos padrões da descoberta.

E aqui regresso eu ao tema do meu dizer.

Uma vez por outra, talvez com menos raridade do que muitos supõem, uma ideia nova, a que o destino reservava um futuro brilhante, abrolhou e floriu num espírito solerte, mas não encontrou ambiente propício ao desenvolvimento das suas conseqüências, terreno adequado à sua proliferação. Vinha fora de tempo, na maioria dos casos; fora de lugar e tempo, em alguns outros. Inspiração profética de rica pujança, feliz augúrio, gerador de inquietações até para quem o produziu, não encontrou eco, não teve, de momento, sacerdotes nem culto. Na melhor das hipóteses, não foi compreendida; noutras, por não ter sido entendida, foi hostilizada E só mais tarde, talvez por outra via, a outro propósito, noutro domínio da especulação científica, se revelou a sua fecundidade. Citarei, como exemplos, no meu pelouro, três casos célebres. O primeiro é o da concepção genial de Riemann (na sua tese de 1854, *Sôbre as hipóteses que servem de fundamento à Geometria*) de que as fôrças são manifestações intrínsecas do próprio espaço físico. Esta, embora só fôsse publicada passados doze anos, por Dedekind, depois da morte de Riemann, não foi compreendida. Vinha fora de tempo. Foi a teoria da Gravitação de Einstein, cêrca de sessenta anos mais tarde, que veio revelar o seu audacioso alcance. O segundo é o da teoria de Galois, que vinha fora de tempo e de lugar, mais de lugar que de tempo, hostilizada com a acusação de incompreensível, por juizes de presumível competência. Salvaram-na, 14 anos depois da morte de Galois, a dedicação dum amigo e a esclarecida consciência dum sábio (Liouville) que pôs em evidência a sua genialidade. O terceiro é o da criação do Cálculo diferencial absoluto de Ricci, ferramenta admirável cuja indispensabilidade só veio a reconhecer-se nos primeiros anos dêste século ainda a propósito da teoria da Gravitação. Esta teve um purgatório mais curto e mais suave: só se não compreendeu a sua utilidade enquanto as circunstâncias a não impuseram como único algoritmo possível. Depois, essa utilidade revelou-se, mesmo nos casos em que o seu uso pode suprir-se.

Noutros domínios do pensamento e com maior tardança entre o gérmen e a procriação, podem citar-se as ideias de Leibnitz, em paleontologia, de Leonardo de Vinci, nas ciências físicas, de Rogério Bacon, de Moisés Maimónides. Às vezes, porém, a ideia nova veio apenas fora de lugar. O meio não era próprio, por ser distante dos grandes centros de cultura e serem precárias

as condições de divulgação; porque o seu autor não tinha elementos de informação suficientes sôbre as possibilidades construtivas do seu conceito; ou ainda porque a ideia lhe apareceu, por acidente e sem maior sobressalto, à margem dum raciocínio, não lhe consagrando a merecida atenção. Hoje em dia, a-pesar-de serem numerosíssimos e de rápida transmissão os instrumentos de publicidade, é cada vez mais freqüente, mercê da grande densidade de produção científica, que a mesma ideia tenha sido exposta por dois autores, às vezes com um intervalo de tempo relativamente grande, sem prejuízo da boa-fé do segundo. Noutros tempos, como a informação era reduzidíssima, acontecia o mesmo, embora a produção fôsse incomparàvelmente menor; mas, por falta de esclarecimento, era maior o risco duma falsa consagração de prioridade. E há aí, certamente, pelo que nos diz respeito, alguns reparos que formular, algumas reivindicações que fazer, alguns haveres que restituir. Documente-se o desacêrto, aponte-se o êrro, registe-se a infracção; sem alardes de polémica, nem renúncias de senhorio. Se o fizéssemos com jactância, mal iria à nossa compostura; se o tentássemos com artifício, mal iria à justiça da nossa causa.

Também não devemos esquecer-nos, na justificação desta cruzada, do resguardo, por vezes do sigilo que alguns autores punham no enunciado dos seus processos de investigação. Entre o caminho que os levou à descoberta e o que êles seguiram na exposição da verdade, não há analogia nenhuma. Podemos dizer que o intuito dêste procedimento nem sempre era egoísta. A disciplina científica do seu tempo impunha-lhes certas normas de raciocínio, sem as quais êste se não julgava perfeito; e não fôra por essa via que êles tinham atingido o conhecimento. Como o alcançaram? É o que ficará quási sempre por saber, sem deixar de ser interessante averiguar, porque ao longo dêsses trilhos proíbidos, alfaias abandonadas da invenção, haverá, aqui e além, conceitos pela primeira vez utilizados. Numa carta célebre de Arquímedes para Eratóstenes, descoberta já êste século, vem a confissão de que não fôra a via geométrica ortodoxa, mas sim a via aritmética que o conduzira a muitos dos seus inventos gloriosos, que êle depois apresentara com a forma canónica do seu tempo, que era a geométrica. O depoimento era, a bem dizer, desnecessário: os seus triunfos em geometria métrica não podiam ter sido conseguidos com a aparelhagem geométrica da sua época.

Outras vezes, porém, o encobrimento dos expedientes, quando não dos próprios factos, foi propósito de menor isenção e nobreza. Cito esta passagem de Leibnitz, na sua Memória de 1686, das *Acta Eruditorum:*

Quem primeiro obteve uma quadratura, pelo método dos coeficientes indeterminados de uma série, foi Mercator; e um geómetra de espírito profundo, Isaac Newton, fêz a mesma descoberta independentemente, tirando dela consequências de ordem geral. Se tivesse publicado os métodos e razões que ainda mantém ocultos, não resta dúvida de que nos teria permitido grandes simplificações e grandes progressos na ciência. Se há aqui censura e não apenas mágoa, o acusador era digno do reu. Mais do que o remoque, todavia, deve ter surpreendido Newton a inexcedível clareza com que o seu método era exposto nessa mesma memória de Leibnitz. Quem assim exerce o monopólio, arrisca-se a perder a glória da invenção.

Mas, embora pondo de parte todo o intuito de dissimulação, o certo é que, à margem das derrotas do pensamento, que foram mais fortemente guiadas pela intuïção do que pelo rigor, mais belas do que seguras, terão ficado, uma ou outra vez, ideias mais tarde reencontradas e desenvolvidas. Se é difícil indagá-lo, o seu achado pode ser que venha honrar, num ou noutro domínio, a nossa investigação científica.

Por vezes o mérito da invenção é relativo. A ideia nasceu, ganhou vulto, adquiriu consistência; o espírito que a gerou possuiu-se quási da sua certeza. Mas estavam ainda por criar os aprestos do raciocínio que tornariam possível a demonstração da sua veracidade; ou os instrumentos de análise que haviam de permitir a sua realização.

Aqui há mais predição do que invento; mais crença do que saber; mais argúcia do que justeza. Mas não deixa de haver préstimo; e por vezes, prodígio memorável. Quantas ideias aguardaram, para vingar, a criação dos logaritmos, do microscópio, da estatística? Quantas esperaram, formadas e até vulgarizadas, um processo dedutivo adequado, uma experiência concludente, uma conjuntura favorável de elementos de prova? Até a pobreza tem servido, com gloriosa proficuidade, o progresso científico. *Das fraquezas, fôrça,* diz o ditado. Todos sabem, com efeito, que foi a angustiosa situação económica das universidades italianas, em tempos passados, que levou alguns dos seus Mestres, impossibilitados de fazer experiências nos próprios laboratórios, a criticar e a esclarecer experiências realizadas em países de grandes recursos. E dessa crítica resultaram alguns dos mais belos capítulos da Física Matemática. É claro que a existência dêsse elenco de peregrinas mentalidades que viram o que a outros passara despercebido, é um caso excepcional; e, por isso mesmo, é conveniente não abusar do argumento.

Cumpre ainda não esquecer aqueles conceitos que só foi possível formular, como schólio de numerosas leis particulares, pela revelação do que elas têm de comum; ou como ajustamento de resultados dispersos que uma iniciativa feliz distinguiu e congraçou. Às vezes, foi um só dêsses elementos que inculcou a averiguação de afinidades; outras, foi também só um o representante primacial do pacto. E êsse elemento dominante da aliança, a título de qualidade ou de quantidade, pode bem ter sido gerado na nossa terra.

Difícil de indagar é também, quási sempre impossível, aquilo que o autor não publicou; deixando apenas, em casos excepcionais, a alguém da sua privança, ligeiros indícios, breves anúncios, raras vezes um resumo completo do seu pensamento. Ocorrem-me, a propósito, trabalhos de Dirichlet, revelados por Lipschitz, e o grande espólio inédito de Gauss e Cauchy, dentro e fora do pelouro matemático. Espíritos em que o desejo de saber prevalecia sôbre a necessidade de transmitir, mais sôfregos de inquirir do que deligentes em apregoar, estudavam muito mais do que escreviam; contràriamente a tantos que escrevem muito mais do que estudam. Meritório, é portanto, procurar inéditos, comentários de amigos e discípulos, sôbre o que ouviram do seu pensar e souberam do seu viver; ainda que o pensador não seja Sócrates e o intérprete não seja Platão.

Já me referi, meus Senhores, à oportunidade dêste Congresso, à indispensável sinalização das nossas pègadas, leves ou profundas, indeléveis ou frustes, no trilho da descoberta, justificando-a em relação à quantidade do conhecimento, à multiplicação e estreiteza das especialidades, à ignorância, cada vez maior, de cada um, perante o amontoado do saber de todos; em resumo, em relação à extensão do domínio científico. Quero agora aludir ao seu ensejo perante a aspiração actual de *seleccionar, relacionar* e *consolidar* os conhecimentos; aspiração que tem sido lentamente realizada, à custa de laboriosas e delicadas especulações.

A selecção não tem o intuito (e, se o tivesse, vê-lo-ia frustrado) de coïbir ou dominar a especialização; visa, sim, a orientá-la, pondo em relêvo o que se afigura geral e fecundo, dando realce às ideias de maior pêso e aos problemas de maior interêsse, em cada sector científico, que são, quási sempre, aquêles que o aparentam e vinculam com os sectores vizinhos. E assim, essa selecção, imposta pela necessidade de organizar, insuprível, embora atenuável pela melhoria dos métodos educativos, é também um agente de relação, um instrumento precioso de confronto, um guia admirável desta jornada gloriosa a caminho da *unidade,* que é o alvo de todo o labor científico. Inversamente, sempre que duas teorias, pertencentes a domínios diferentes, vêm a encontrar-se num certo ponto, é quási certo que, nas vizinhanças dessa encruzilhada das respectivas trajectórias, se encontram ideias e problemas dignos de selecção. Por

ventura, não estão à superfície: para os descobrir, é mister explorar atentamente o sub-solo; fazer topografia subterrânea, na linguagem dos mineiros. E aí está outra característica da moderna investigação científica: a marcha em profundidade. Quantas surprêsas, quantos desalentos não trouxe, por vezes, a abertura dos primeiros caboucos! Quantas ilusões desfeitas, quantos receios confirmados, quantos erros reconhecidos! Na ansia de criar, no empenho de descobrir, a devassa superficial fôra insegura e presunçosa. Atraiçoavam-na precipitadas ilações, iludíam-na insidiosas miragens. O aliciante atractivo duma temerária intuïção dispensara imprudentemente um minucioso exame dos fundamentos do raciocínio. E assim, essa marcha em profundidade tem sido o motivo duma imprescindível obra de consolidação do conhecimento. Houve que fazer uma revisão minuciosa e arguta dos princípios, um exame severo da sua compatibilidade, uma rigorosa inquirição da sua suficiência. Essa obra de consolidação, que o não é menos de purificação, exigiu igualmente uma correcção de métodos que uma falsa simplicidade impusera e vulgarizara, em inseguras condições de rigor. E não falta quem julgue que alguns dêsses métodos devem ser simplesmente abandonados, como instrumentos precários de investigação da verdade. Citarei, como exemplo, as opiniões de Brouwer e da sua escola sôbre o princípio do têrço excluso, que, a serem perfilhadas, invalidariam tôda a demonstração por absurdo; invalidade que resultaria das mesmas definições de verdadeiro e falso, talvez com surprêsa, embora agradável, da memória de Arnauld, o sistematizador da geometria de Port-Royal.

Como se vê, nesta difícil tarefa de fortalecer e depurar o conhecimento, tem sido necessário regressar às origens, recordar o passado, reanimar a dúvida, coíbir o desmando. Mas, nesse retôrno não há que enxertar o desânimo, nessa revisão de valores não há lugar para deprimentes cepticismos, porque os invariantes são numerosos e seguros, porque o traço das antigas fundações, embora errado aqui e além, é ainda largamente aproveitável. O que fica, é quási sempre bastante para garantir a soberania, ainda que insuficiente para assegurar a posse. Pois bem: nesta renovação de antigas jornadas, neste deambular por conhecidos lugares, poderá rastrear-se algures um sinal da nossa autoria: importa que o recordemos.

Outro aspecto da actuação científica dos nossos dias está no próprio conceito de conhecimento. Surgiram doutrinas, criaram-se teorias em que o intento duma determinação quantitativa indefinidamente aperfeiçoável, teve de ceder o passo a uma aspiração talvez mais modesta, mas mais segura, de cômputo estatístico. As mecânicas quânticas, por exemplo. O conhecimento traduz-se numa probabilidade. Contudo, o facto culminante desta notável construção, foi o concurso da teoria dos Grupos, estabelecendo, em termos de rigor, propriedades imediatamente relacionadas, por via qualitativa, com as hipóteses a que conduziu a realidade observável. A representação grupal veio mostrar, ou pela via transcendente de Weyl, ou pela via algébrica de Cartan, que nela se incluem, como elementos fundamentais, todos os números a que conduzem as teorias quânticas.

Há aqui uma substituïção do *quantitativo* pelo *qualitativo,* que também se verifica, por exemplo, na Topologia; e nela está uma das mais belas aquisições do pensamento moderno, dando-nos um conhecimento global, preciso e claro, inatingível por via dedutiva. Nesta nova vitória do entendimento, há também regresso; mas não é já aquêle retôrno aos princípios, na intenção de consolidar, a que fiz referência: é um regresso ao passado, no intuito de compreender. É, no dizer de Weyl, o *sentido grego da Forma, reclamando a situação primordial que parecia ter-lhe sido roubada pelo conceito de Número.* Não é já uma destrinça de elementos qualitativos, ajudando a descrever, como tem sido o exame e classificação das singularidades dos problemas, que tanto deve ao nosso século: é uma forma qualitativa total de conhecer. E

é êste destaque do *qualitativo* que, talvez, possa interessar a algum sector do nosso passado científico, guardadas as proporções e ressalvado o acanhamento de se afirmar.

Noutros campos, pelo contrário, o maior empenho da especulação mais recente tem sido a rehabilitação do *quantitativo* que, em grande parte, aguardava a criação da ferramenta adequada: o cálculo funcional. A Economia Política, as teorias de Depreciação e Monopólio, a dos Seguros de Vida, a da Hereditariedade devem-lhe inestimáveis serviços. Equações íntegro-diferenciais, equações às derivadas funcionais são os aprestos de maior valor dêste fecundo algoritmo da Análise. Volterra, o seu fundador, Hadamard, Levi, Gateaux, os seus pioneiros de melhor classe, não falando na segunda geração de investigadores. Mas há ainda, nesta obra de justa valorização do quantitativo, uma parte de alta valia que não precisava da alfaia funcional, para nascer e medrar, e que, no entanto, só em nossos dias entrou em regime de esclarecimento: a axiomática quantitativa dalguns domínios, de natureza essencialmente quantitativa, que até aí tinham vivido em regime qualitativo, nos dados e nos resultados, e para os quais, portanto, o quantitativo era apenas uma indumentária. Vou citar um exemplo que vem contrariar o meu propósito de não mencionar, nesta oração, trabalhos científicos de autoria nacional, por me parecer que essa menção pertence, de direito, a quem tem a incumbência de proferir as orações inaugurais das várias secções dêste Congresso. O exemplo é êste: a estruturação quantitativa dos fundamentos da Economia Política, do senhor Doutor Pacheco de Amorim. E justifico a excepção desta maneira: o autor tem a seu cargo a oração inaugural da secção de ciências matemáticas e pode, muito bem, esquecer-se de lhe fazer referência.

Haverá sempre, bem entendido, no mundo físico, realidades inabordáveis, quer pelos métodos quantitativos, quer por algoritmos qualitativos, de natureza topológica, grupal, combinatória, ou totalmente abstracta; isto é, realidades inatingíveis por via matemática. Mas, por enquanto, não se vislumbra outra. E esta, há mais de meio século que deixou de ser imposta pelos cultores desinteressados da ciência pura: são os físicos que a solicitam, utilizando as suas mais abstractas criações. Deve dizer-se que essa utilização nem sempre tem sido legítima, sem desprimor para a genialidade dos criadores da física moderna, alguns dêles salvos do naufrágio por um poderoso instinto de orientação. Vejam-se, a propósito, os comentários de Rey Pastor sôbre a função fantasma de Dirac, e sôbre a validade dos seus resultados, comprovada pelo mesmo ilustre Professor, em termos de rigor analítico, à custa da teoria dos integrais singulares.

Característica ainda da actuação científica dos últimos anos é a coexistência activa de teorias díspares, por vezes antagónicas, simultâneamente necessárias para a explicação dos fenómenos, enquanto não surge um modêlo teórico que as substitua com vantagem; por exemplo, as teorias corpuscular e ondulatória. E é possível que no passado, em casos semelhantes, num ou outro domínio, tenha sido proveitosa a nossa interferência.

Desejo agora aludir a uma origem fecunda de ensinamentos que, na mesma abundância dos seus triunfos, tem sido agente primacial da unidade do conhecimento: o modêlo de construção, o paradigma de marcha.

Tem acontecido que uma determinada teoria, um certo conjunto experimental, mais ou menos retocados na sua trama íntima, venham promover o rápido desenvolvimento de outros da mesma estirpe, de propósitos análogos, ou de texturas semelhantes É de todos conhecida a numerosa descendência da Mecânica Celeste, desde a teoria da Capilaridade, do mesmo Laplace, até à teoria atómica de Bohr; ou os grandes sucessos, até fora do domínio matemático, que a ciência deve aos métodos de variação das constantes arbitrárias, em boa hora criados por Lagrange; ou ainda o empenho

• ESTÁDIO DE ATLETISMO • TRIBUNA DE HONRA E COLUNATA — EM CONSTRUÇÃO •

ESTÁDIO NACIONAL

ESTÁDIO DE TENNIS

2.000 LUGARES SENTADOS

ESTÁDIO DE ATLETISMO • ASPECTO DA CONSTRUÇÃO • TERRAPLANAGENS, CANTARIAS, RELVADOS, PISTAS DURAS

ESTÁDIO NACIONAL

• ESTÁDIO DE ATLETISMO • 50.000 LUGARES • VISTA DE CONJUNTO — LADO N. •

com que se procura dar a certos problemas a forma variacional, resolvendo-os pela estacionaridade, livre ou condicionada, de certos integrais. Mas, nalguns casos, a analogia do problema, no seu teor ou na sua casta, com outros em cuja resolução o modêlo foi profícuo, não se vislumbra; e só uma grande agudeza de engenho, aliada a uma vasta cultura, de pronto e impecável comando, de fácil e segura utilização, pressentiu o êxito da tentativa. Logo lembra citar, como exemplos, a aplicação, feita por Poincaré, da Geometria de Lobatschefski à construção das fuchsianas, ou certas estruturas de Geometria Topológica da escola hamburguesa de Blaschke. E pode bem ser que algum dêsses modelos de frutuosa adaptação, alguma dessas normas de genérica oportunidade, tenha tido entre nós, porventura sem deixar vestígios notórios, a sua primeira concepção.

Não alongo mais, meus Senhores, esta menção de motivos, êste panorama de temas possíveis, êste elenco de argumentos próprios duma assembleia como a nossa. Sei que o meu dizer foi incompleto; mas êle apenas desejou ser bastante, sem importunas minúcias; ajustado ao intento, sem demasias na alegação. Pretendi sòmente, não sei se com êxito, justificar o empreendimento, insinuar o seu propósito, encarecer o seu mérito, conjecturar o seu triunfo. Não faltam garantias do meu presságio. E oxalá que um dos sinais da vitória seja o incentivo de fazermos *mais* e *melhor*.

Energia magnética, momento e estados de equilíbrio livre da máquina assíncrona

POR C. FERRER MONCADA
PROFESSOR DO I. S. T.

No trabalho presente estabelece-se a expressão da energia magnética da máquina assíncrona e a partir dela deduz-se o valor do momento do seu binário electrodinâmico. Estudam-se a seguir, sob o ponto de vista energético, os estados de equilíbrio livre do sistema constituído pelas bobinas da máquina assíncrona.

* * *

Limitamos o nosso estudo ao caso da máquina assíncrona simétrica com estator e rotor trifásico. Consideramos os fenómenos como quási-estacionários e desprezamos, portanto, a energia radiante. Além disso serão desprezadas as perdas no ferro do circuito magnético da máquina assíncrona. Não tomamos em linha de conta a variação da permeabilidade magnética do ferro e consideramos, assim, os coeficientes de indução das bobinas independentes dos valores das correntes que as percorrem. Tratando os fenómenos como quási-estacionários é licito desprezar o campo magnético originado pela variação de fluxo do vector deslocamento em relação ao campo magnético da corrente de condução e considerar êste como concentrado nas bobinas de indução. Como sistema de unidades adoptamos o sistema electromagnético.

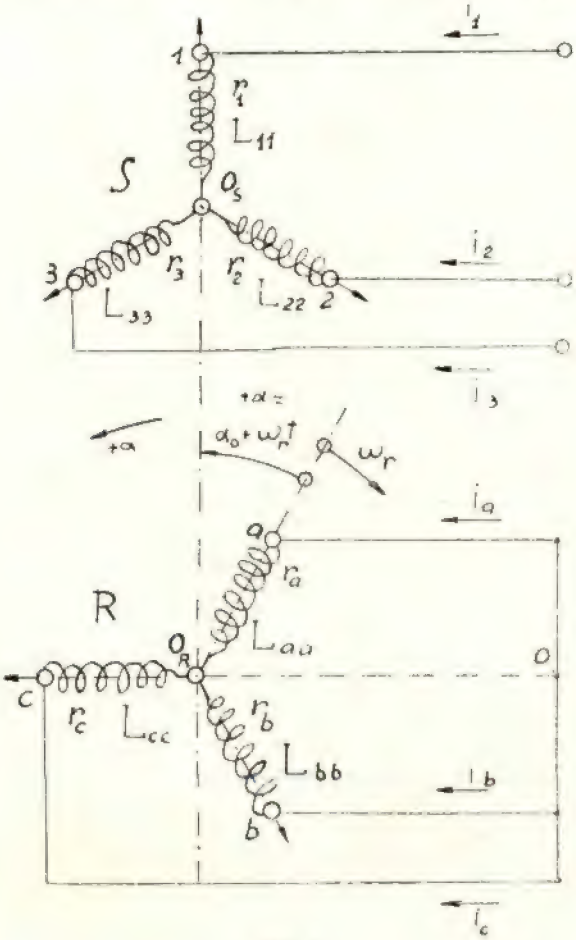


Fig. 1

Notações gerais segundo o esquema da fig. 1:

r_1, r_2, r_3 ..... resistência de cada uma das fases do estator.
r_a, r_b, r_c ..... resistência de cada uma das fases do rotor.
L_{11}, L_{22}, L_{33} ..... coeficientes de auto-indução de cada uma das fases do estator.
L_{aa}, L_{bb}, L_{cc} ..... coeficientes de auto-indução de cada uma das fases do rotor.
L_{12}, ... coeficiente de indução mútua entre duas fases do estator.
L_{ab}, ... coeficiente de indução mútua entre duas fases do rotor.
L_{a1}, ... coeficiente de indução mútua entre uma fase do rotor e uma fase do estator.
L_{1a}, ... coeficiente de indução mútua entre uma fase do estator e uma fase do rotor.
i_1, i_2, i_3 ..... valores instantâneos das correntes de cada uma das fases do estator.
i_a, i_b, i_c ..... valores instantâneos das correntes de cada uma das fases do rotor.
n..... número de voltas do rotor por minuto.
2 p ..... número de polos da máquina assíncrona.
$\omega_r = 2\pi\left(\frac{n}{60}\right)p$ ... pulsação eléctrica de rotação.
$\omega = 2\pi f$..... pulsação das correntes eléctricas dos circuitos do estator.
t ..... tempo.
ε ..... base dos logaritmos naturais.
$j = +\sqrt{-1}$.

I — Energia magnética.

O valor instantâneo da energia magnética de um sistema de bobinas exprime-se em função das correntes e coeficientes de indução pela relação:

$$U = \frac{1}{2} \sum_k \sum_\lambda i_k \, i_\lambda \, L_{\lambda k} \quad . \tag{1}$$

Representando por Φ_k o fluxo total de indução magnética ligado ao circuito k percorrido pela corrente i_k temos:

$$\Phi_k = \sum_\lambda i_\lambda \, L_{\lambda k} \quad . \tag{2}$$

Das expressões (1) e (2) resulta para o valor instantâneo da energia magnética a relação:

$$U = \frac{1}{2} \sum_k i_k \, \Phi_k \quad . \tag{3}$$

Em virtude da própria construção da máquina assíncrona, os circuitos do estator encontram-se ligados magnèticamente entre si e bem assim os circuitos do rotor. Além disso existe a ligação magnética entre o sistema de bobinas do estator e o sistema do rotor.

Partindo da expressão (1) e atendendo ao esquema da fig. 1 e às notações estabelecidas, obtém-se a seguinte expressão da energia magnética da máquina assíncrona:

$$
\begin{aligned}
U = & \frac{1}{2} i_1 \left(i_1 L_{11} + i_2 L_{21} + i_3 L_{31} \right) + \frac{1}{2} i_1 \left(i_a L_{a1} + i_b L_{b1} + i_c L_{c1} \right) \\
& + \frac{1}{2} i_2 \left(i_1 L_{12} + i_2 L_{22} + i_3 L_{32} \right) + \frac{1}{2} i_2 \left(i_a L_{a2} + i_b L_{b2} + i_c L_{c2} \right) \\
& + \frac{1}{2} i_3 \left(i_1 L_{13} + i_2 L_{23} + i_3 L_{33} \right) + \frac{1}{2} i_3 \left(i_a L_{a3} + i_b L_{b3} + i_c L_{c3} \right) \\
& + \frac{1}{2} i_a \left(i_a L_{aa} + i_b L_{ba} + i_c L_{ca} \right) + \frac{1}{2} i_a \left(i_1 L_{1a} + i_2 L_{2a} + i_3 L_{3a} \right) \\
& + \frac{1}{2} i_b \left(i_a L_{ab} + i_b L_{bb} + i_c L_{cb} \right) + \frac{1}{2} i_b \left(i_1 L_{1b} + i_2 L_{2b} + i_3 L_{3b} \right) \\
& + \frac{1}{2} i_c \left(i_a L_{ac} + i_b L_{bc} + i_c L_{cc} \right) + \frac{1}{2} i_c \left(i_1 L_{1c} + i_2 L_{2c} + i_3 L_{3c} \right) . \qquad (4)
\end{aligned}
$$

O estudo que se segue limita-se ao caso de uma máquina assincrona com enrolamentos simétricos no estator e no rotor.

Condições de simetria e notações:

$$
\left.
\begin{array}{c}
\text{Estator:} \\
r_1 = r_2 = r_3 = r_S \ , \quad L_{11} = L_{22} = L_{33} = L_{SS} \ , \\
L_{12} = L_{21} = L_{23} = L_{32} = L_{31} = L_{13} = L_{MS} \ . \\
\text{Rotor:} \\
r_a = r_b = r_c = r_R \ , \quad L_{aa} = L_{bb} = L_{cc} = L_{RR} \ , \\
L_{ab} = L_{ba} = L_{bc} = L_{cb} = L_{ca} = L_{ac} = L_{MR} \ .
\end{array}
\right\} \qquad (5)
$$

Para os pontos de derivação de corrente O_S e O_R (fig. 1) têm lugar as relações:

$$
\left.
\begin{array}{l}
i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\
i_a + i_b + i_c = 0.
\end{array}
\right\} \qquad (6)
$$

Na expressão da energia magnética (relação 4) figuram termos que resultam sòmente dos circuitos do estator, termos que resultam sòmente dos circuitos do rotor e finalmente termos que resultam da ligação magnética entre o estator e o rotor. Nestes últimos figuram os coeficientes de indução mútua entre os dois sistemas de bobinas, tornando-se assim necessária a sua definição matemática. A disposição dos enrolamentos do estator e do rotor no espaço (fig. 1) acarreta as seguintes relações:

$$
\left.
\begin{array}{ll}
L_{a1} = L_{a1\,max} \cos \alpha & L_{a1} = L_{a1\,max} \cos \alpha \\
L_{b1} = L_{b1\,max} \cos (\alpha + 120) & L_{a2} = L_{a2\,max} \cos (\alpha + 240) \\
L_{c1} = L_{c1\,max} \cos (\alpha + 240) & L_{a3} = L_{a3\,max} \cos (\alpha + 120) \\
L_{1a} = L_{1a\,max} \cos (360 - \alpha) & L_{1a} = L_{1a\,max} \cos (360 - \alpha) \\
L_{2a} = L_{2a\,max} \cos (120 - \alpha) & L_{1b} = L_{1b\,max} \cos (240 - \alpha) \\
L_{3a} = L_{3a\,max} \cos (240 - \alpha) & L_{1c} = L_{1c\,max} \cos (120 - \alpha) \\
\multicolumn{2}{l}{L_{a1\,max} = L_{b1\,max} = L_{c1\,max} = L_{a2\,max} = L_{a3\,max} = L_{RS}} \\
\multicolumn{2}{l}{L_{1a\,max} = L_{1b\,max} = L_{1c\,max} = L_{2a\,max} = L_{3a\,max} = L_{SR}}
\end{array}
\right\} \qquad (7)
$$

em que $$\alpha = \alpha_0 + \omega_r t \quad . \tag{8}$$

Nesta última equação representa ω_r a pulsação eléctrica de rotação, t o tempo, α o ângulo em medida eléctrica formado pelos eixos magnéticos das bobinas (fig. 1) e α_0 uma constante arbitrária. Por simplicidade consideramos na exposição que segue $\alpha_0 = 0$.

Quanto às correntes que percorrem os circuitos do estator e do rotor da máquina assíncrona e figuram na expressão (4) da sua energia magnética consideramo-las como alternadas sinusoidais. A sua expressão matemática será então:

$$\left.\begin{array}{ll} i_1 = \sqrt{2}\, I_S \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) & i_a = \sqrt{2}\, I_R \operatorname{sen}(s\omega t + \chi) \\ i_2 = \sqrt{2}\, I_S \operatorname{sen}(\omega t + \varphi - 120) & i_b = \sqrt{2}\, I_R \operatorname{sen}(s\omega t + \chi - 120) \\ i_3 = \sqrt{2}\, I_S \operatorname{sen}(\omega t + \varphi - 240) & i_c = \sqrt{2}\, I_R \operatorname{sen}(s\omega t + \chi - 240) \end{array}\right\} \tag{9}$$

em que I_S e I_R representam os valores eficazes das correntes e ω e $s\omega$ representam respectivamente a pulsação nos circuitos do estator e nos circuitos do rotor.

Vamos agora proceder aos cálculos necessários para introduzir as relações (5), (6), (7), (8) e (9) na expressão (4) da energia magnética da máquina assíncrona.

a) Termos da expressão (4) que representam a energia própria dos circuitos do estator: Êstes termos são dados pelas expressões:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} i_1 \left(i_1 L_{11} + i_2 L_{21} + i_3 L_{31} \right) = \frac{1}{2} i_1 \Phi_{1S} \\ \frac{1}{2} i_2 \left(i_1 L_{12} + i_2 L_{22} + i_3 L_{32} \right) = \frac{1}{2} i_2 \Phi_{2S} \\ \frac{1}{2} i_3 \left(i_1 L_{13} + i_2 L_{23} + i_3 L_{33} \right) = \frac{1}{2} i_3 \Phi_{3S} \end{array}\right\} \tag{10}$$

em que Φ_{1S}, Φ_{2S} e Φ_{3S} representam os fluxos magnéticos provenientes dos circuitos do estator e ligados respectivamente com as suas fases 1, 2 e 3 (fig. 1). Atendendo às relações (5) e (6) as expressões (10) tomam a forma:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} i_1 \Phi_{1S} = \frac{1}{2} i_1 \left[i_1 \left(L_{SS} - L_{MS} \right) \right] = \frac{1}{2} i_1^2 L_{SS_\Delta} \\ \frac{1}{2} i_2 \Phi_{2S} = \frac{1}{2} i_2 \left[i_2 \left(L_{SS} - L_{MS} \right) \right] = \frac{1}{2} i_2^2 L_{SS_\Delta} \\ \frac{1}{2} i_3 \Phi_{3S} = \frac{1}{2} i_3 \left[i_3 \left(L_{SS} - L_{MS} \right) \right] = \frac{1}{2} i_3^2 L_{SS_\Delta} \end{array}\right\} \tag{11}$$

em que $L_{SS_\Delta} = L_{SS} - L_{MS}$ representa o coeficiente de indução trifásica do estator.

Admitindo que as correntes i_1, i_2 e i_3 são alternadas sinusoidais e constituem um sistema trifásico simétrico segundo as relações (9), obtém-se o seguinte resultado para a soma dos três termos (relações 11):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left(i_1 \Phi_{1S} + i_2 \Phi_{2S} + i_3 \Phi_{3S} \right) = \frac{1}{2} L_{SS_\Delta} \left(i_1^2 + i_2^2 + i_3^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} L_{SS_\Delta} I_S^2 \left[1 - \cos(2\omega t + 2\varphi) + 1 - \cos(2\omega t + 2\varphi - 240) + 1 - \cos(2\omega t + 2\varphi - 480) \right] = \\ &= \frac{3}{2} I_S^2 L_{SS_\Delta} \end{aligned} \tag{12}$$

Daqui se conclui que, a-pesar-de cada um dos termos pulsar com uma freqüência dupla da freqüência da corrente em volta do seu valor médio, a sua soma é constante e dada pela expressão (12).

b) Termos da expressão (4) que representam a energia própria dos circuitos do rotor.
Êstes termos são dados pelas expressões:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2} i_a \left(i_a L_{aa} + i_b L_{ba} + i_c L_{ca} \right) &= \frac{1}{2} i_a \Phi_{aR} \\
\frac{1}{2} i_b \left(i_a L_{ab} + i_b L_{bb} + i_c L_{cb} \right) &= \frac{1}{2} i_b \Phi_{bR} \\
\frac{1}{2} i_c \left(i_a L_{ac} + i_b L_{bc} + i_c L_{cc} \right) &= \frac{1}{2} i_c \Phi_{cR}
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

em que Φ_{aR} , Φ_{bR} , Φ_{cR} representam os fluxos magnéticos provenientes dos circuitos do rotor e ligados respectivamente com as suas fases *a* , *b* e *c* (fig. 1). Atendendo às relações (5) e (6) as expressões (13) tomam a forma:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2} i_a \Phi_{aR} &= \frac{1}{2} i_a \left[i_a \left(L_{RR} - L_{MR} \right) \right] = \frac{1}{2} i_a^2 L_{RR\Delta} \\
\frac{1}{2} i_b \Phi_{bR} &= \frac{1}{2} i_b \left[i_b \left(L_{RR} - L_{MR} \right) \right] = \frac{1}{2} i_b^2 L_{RR\Delta} \\
\frac{1}{2} i_c \Phi_{cR} &= \frac{1}{2} i_c \left[i_c \left(L_{RR} - L_{MR} \right) \right] = \frac{1}{2} i_c^2 L_{RR\Delta}
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

em que $L_{RR\Delta} = L_{RR} - L_{MR}$ representa o coeficiente de indução trifásica do rotor.
Atendendo às relações (9) obtemos a partir de (14) a expressão:

$$\frac{1}{2} \left(i_a \Phi_{aR} + i_b \Phi_{bR} + i_c \Phi_{cR} \right) = \frac{1}{2} L_{RR\Delta} \left(i_a^2 + i_b^2 + i_c^2 \right) = \frac{3}{2} I_R^2 L_{RR\Delta} \qquad (15)$$

que mostra ser constante a soma dos três termos relativos à energia própria dos circuitos do rotor.

c) Termos da expressão (4) que resultam da ligação magnética entre o estator e o rotor.
Destinguimos duas categorias:

*c*1) Termos que resultam de fluxos magnéticos provenientes das correntes do rotor e ligados às fases do estator.

*c*2) Termos que resultam de fluxos magnéticos provenientes das correntes do estator e ligados às fases do rotor.

*c*1) Esta primeira categoria consta dos três seguintes termos da expressão (4):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2} i_1 \left(i_a L_{a1} + i_b L_{b1} + i_c L_{c1} \right) &= \frac{1}{2} i_1 \Phi_{1R} \\
\frac{1}{2} i_2 \left(i_a L_{a2} + i_b L_{b2} + i_c L_{c2} \right) &= \frac{1}{2} i_2 \Phi_{2R} \\
\frac{1}{2} i_3 \left(i_a L_{a3} + i_b L_{b3} + i_c L_{c3} \right) &= \frac{1}{2} i_3 \Phi_{3R}
\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

em que Φ_{1R}, Φ_{2R} e Φ_{3R} representam os fluxos magnéticos provenientes dos circuitos do rotor e ligados respectivamente com as fases *1*, *2* e *3* do estator (fig 1). Tomando em linha de conta as relações (7), (8), e (9) vamos calcular estes fluxos. Destas relações resulta:

$$i_a = \sqrt{2}\ I_R \operatorname{sen}(s\omega t + \chi) \qquad L_{a1} = L_{RS} \cos(\omega_r t)$$

$$i_b = \sqrt{2}\ I_R \operatorname{sen}(s\omega t + \chi - 120) \qquad L_{b1} = L_{RS} \cos(\omega_r t + 120)$$

$$i_c = \sqrt{2}\ I_R \operatorname{sen}(s\omega t + \chi - 240) \qquad L_{c1} = L_{RS} \cos(\omega_r t + 240).$$

Partindo daqui obtém-se para o fluxo representado em (16) por Φ_{1R} a expressão:

$$\Phi_{1R} = i_a L_{a1} + i_b L_{b1} + i_c L_{c1} = \sqrt{2}\ I_R \frac{3}{2} L_{RS} \operatorname{sen}\left[(s\omega + \omega_r)t + \chi\right]. \tag{17}$$

Na máquina assincrona tem porém lugar a relação

$$s\omega + \omega_r = \omega \tag{18}$$

em que *s* representa o «escorregamento».

Introduzindo (18) em (17) obtém-se:

$$\Phi_{1R} = \sqrt{2}\ I_R L_{RS_\Delta} \operatorname{sen}(\omega t + \chi) \tag{19}$$

em que $L_{RS_\Delta} = \frac{3}{2} L_{RS}$ representa o coeficiente de indução mútua trifásica do rotor sôbre o estator.

De uma maneira análoga obtemos para Φ_{2R} e Φ_{3R} as seguintes expressões:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{2R} &= i_a L_{a2} + i_b L_{b2} + i_c L_{c2} = \sqrt{2}\ I_R L_{RS_\Delta} \operatorname{sen}(\omega t + \chi - 120) \\ \Phi_{3R} &= i_a L_{a3} + i_b L_{b3} + i_c L_{c3} = \sqrt{2}\ I_R L_{RS_\Delta} \operatorname{sen}(\omega t + \chi - 240). \end{aligned}\right\} \tag{19 a}$$

As correntes dos circuitos do rotor possuem segundo (9) a pulsação $s\omega$. O rotor gira porém com uma velocidade angular a que corresponde a pulsação eléctrica de rotação ω_r e em virtude disso actuam estas correntes sobre o estator com a pulsação $(s\omega + \omega_r)$ que segundo (18) é igual à pulsação ω dos circuitos do estator. É por esta razão que os fluxos Φ_{1R}, Φ_{2R} e Φ_{3R} das relações (19) e (19 a) provenientes das correntes do rotor com a pulsação $s\omega$ actuam sôbre as fases do estator com a pulsação ω.

Das relações (9), (19) e (19 a) resultam as expressões:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} i_1 \Phi_{1R} &= \frac{1}{2} I_R I_S L_{RS_\Delta} \left[\cos\beta - \cos(2\omega t + \varphi + \chi)\right] \\ \frac{1}{2} i_2 \Phi_{2R} &= \frac{1}{2} I_R I_S L_{RS_\Delta} \left[\cos\beta - \cos(2\omega t + \varphi + \chi - 240)\right] \\ \frac{1}{2} i_3 \Phi_{3R} &= \frac{1}{2} I_R I_S L_{RS_\Delta} \left[\cos\beta - \cos(2\omega t + \varphi + \chi - 120)\right] \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

em que $\beta = (\chi - \varphi)$ designa o ângulo de desfasagem no tempo entre a estrêla de vectores relativa às correntes do estator e a estrêla relativa às correntes do rotor (fig. 2).

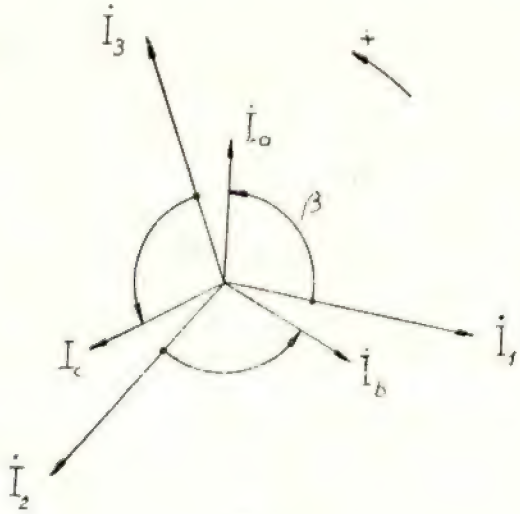


Fig. 2

Adicionando os três termos da energia magnética expressos pelas relações (20) obtém-se:

$$\frac{1}{2}\,(i_1\,\Phi_{1R} + i_2\,\Phi_{2R} + i_3\,\Phi_{3R}) = \frac{3}{2}\,I_R\,I_S\,L_{RS_\lambda}\cos\beta\,. \tag{21}$$

Daqui se conclui que, a-pesar-de cada um dos termos da relação (20) variar em relação ao tempo, a sua soma dada pela expressão (21) se mantém constante.

c_2) Calculamos a seguir os termos da expressão (4) que resultam de fluxos magnéticos provenientes das correntes do estator e ligados às fases do rotor.

Estes termos são dados pelas expressões:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,i_a\left(i_1\,L_{1a} + i_2\,L_{2a} + i_3\,L_{3a}\right) &= \frac{1}{2}\,i_a\,\Phi_{aS}\\
\frac{1}{2}\,i_b\left(i_1\,L_{1b} + i_2\,L_{2b} + i_3\,L_{3b}\right) &= \frac{1}{2}\,i_b\,\Phi_{bS}\\
\frac{1}{2}\,i_c\left(i_1\,L_{1c} + i_2\,L_{2c} + i_3\,L_{3c}\right) &= \frac{1}{2}\,i_c\,\Phi_{cS}
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

em que Φ_{aS}, Φ_{bS} e Φ_{cS} representam os fluxos magnéticos provenientes dos circuitos do estator e ligados respectivamente com as fases *a*, *b* e *c* do rotor. Das relações (7), (8) e (9) resulta:

$$\begin{aligned}
i_1 &= \sqrt{2}\,I_S\,\text{sen}\,(\omega\,t + \varphi) & L_{1a} &= L_{SR}\cos(\omega_r\,t)\\
i_2 &= \sqrt{2}\,I_S\,\text{sen}\,(\omega\,t + \varphi - 120) & L_{2a} &= L_{SR}\cos(\omega_r\,t - 120)\\
i_3 &= \sqrt{2}\,I_S\,\text{sen}\,(\omega\,t + \varphi - 240) & L_{3a} &= L_{SR}\cos(\omega_r\,t - 240)\,.
\end{aligned}$$

A partir destas relações obtém-se para o fluxo representado em (22) por Φ_{aS} a expressão:

$$\Phi_{aS} = i_1\,L_{1a} + i_2\,L_{2a} + i_3\,L_{3a} = \sqrt{2}\,I_S\,\frac{3}{2}\,L_{SR}\,\text{sen}\left[(\omega - \omega_r)\,t + \varphi\right]\,. \tag{23}$$

Introduzindo a relação (18) em (23) resulta

$$\Phi_{aS} = \sqrt{2}\ I_S\ L_{SR_\Delta}\ \text{sen}\ (s\,\omega\,t + \varphi) \tag{24}$$

em que $L_{SR_\Delta} = \frac{3}{2}\ L_{SR}$ representa o coeficiente de indução mútua trifásica do estator sôbre o rotor. Para Φ_{bS} e Φ_{cS} obtemos igualmente as expressões:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{bS} &= \sqrt{2}\ I_S\ L_{SR_\Delta}\ \text{sen}\ (s\,\omega\,t + \varphi - 120) \\ \Phi_{cS} &= \sqrt{2}\ I_S\ L_{SR_\Delta}\ \text{sen}\ (s\,\omega\,t + \varphi - 240). \end{aligned}\right\} \tag{24 a}$$

Das relações (9), (24) e (24 a) resultam as expressões:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\,i_a\,\Phi_{aS} &= \frac{1}{2}\,I_S\ I_R\ L_{SR_\Delta}\Big[\cos\beta - \cos\big(2\,s\,\omega\,t + \varphi + \chi\big)\Big] \\ \frac{1}{2}\,i_b\,\Phi_{bS} &= \frac{1}{2}\,I_S\ I_R\ L_{SR_\Delta}\Big[\cos\beta - \cos\big(2\,s\,\omega\,t + \varphi + \chi - 240\big)\Big] \\ \frac{1}{2}\,i_c\,\Phi_{cS} &= \frac{1}{2}\,I_S\ I_R\ L_{SR_\Delta}\Big[\cos\beta - \cos\big(2\,s\,\omega\,t + \varphi + \chi - 120\big)\Big] \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

em que $\beta = (\chi - \varphi)$ tem significado igual ao já indicado a respeito das equações (20). Adicionando estes últimos três termos da energia magnética obtém-se a expressão:

$$\frac{1}{2}\Big(i_a\,\Phi_{aS} + i_b\,\Phi_{bS} + i_c\,\Phi_{cS}\Big) = \frac{3}{2}\,I_S\ I_R\ L_{SR_\Delta}\cos\beta \tag{26}$$

que é, como a expressão (21), independente do tempo.

Da própria definição dos coeficientes L_{RS_Δ} e L_{SR_Δ} conclui-se que êles são iguais entre si no caso de o estator e o rotor terem o mesmo número de fases. Podemos então escrever:

$$L_{RS_\Delta} = L_{SR_\Delta} = L_{M_\Delta}\ . \tag{27}$$

Das relações (4), (12), (15), (21), (26) e (27) resulta para o valor instantâneo da energia magnética a expressão:

$$U = \frac{3}{2}\,I_S^2\ L_{SS_\Delta} + \frac{3}{2}\,I_R^2\ L_{RR_\Delta} + 3\ I_S\ I_R\ L_{M_\Delta}\cos\beta\ . \tag{28}$$

Esta expressão significa que o valor instantâneo da energia magnética da máquina assincrona simétrica com estator e rotor trifásicos é constante em relação ao tempo.

II — Momento

O parâmetro β que figura na expressão (28) da energia magnética representa o ângulo de desfasagem no tempo entre a estrêla de vectores relativa às correntes do estator e a estrêla relativa às correntes do rotor actuando sôbre o estator (fig. 2). Numa máquina bipolar, êste ângulo β de desfasagem no tempo é igual ao ângulo β_r de desfasagem no espaço entre o campo magnético girante Φ_{S_Δ} originado pelas correntes do estator e o campo magnético girante Φ_{R_Δ} originado pelas correntes do rotor actuando sôbre o estator. O momento do binário electrodi-

nâmico em relação ao eixo de rotação, ou abreviadamente o «momento», duma máquina assíncrona bipolar obtém-se a partir da sua energia magnética pela expressão:

$$T_{bip.} = + \left(\frac{\partial U}{\partial \beta_r}\right)_{I = const.} = + \left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right)_{I = const.} . \tag{29}$$

Para o momento duma máquina assíncrona com p pares de polos obtém-se a expressão:

$$T = + p \left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right)_{I = const.} . \tag{30}$$

Das relações (28) e (30) resulta para o valor instantâneo do momento da máquina assíncrona trifásica a expressão:

$$T = - p \cdot 3 I_S I_R L_{M\Delta} \sin \beta . \tag{31}$$

Desta expressão conclui-se que o valor instantâneo do momento da máquina assíncrona simétrica com estator e rotor trifásico é constante em relação ao tempo. Êste resultado que é condicionado pelo facto do valor instantâneo da sua energia magnética (28) ser constante, representa uma vantagem das máquinas trifásicas sôbre as máquinas monofásicas.

Vamos agora proceder aos cálculos necessários para exprimir o momento em função do escorregamento s da máquina.

Aplicando as leis do electromagnetismo ao circuito do rotor $\overrightarrow{0 \text{ a } 0_R\ 0}$ (fig. 1) e atendendo às relações (5), (6), (7), (8), (9) e (18) obtém-se a seguinte equação vectorial em notação simbólica:

$$\left(r_R + j s \omega L_{RR\Delta}\right) \dot{I}_R + j s \omega L_{SR\Delta} \dot{I}_S = 0 \tag{32}$$

em que têm lugar as notações:

$$\dot{I}_R = I_R \varepsilon^{j\gamma} \quad , \quad \dot{I}_S = I_S \varepsilon^{j\varphi} \quad .$$

Esta equação foi estabelecida supondo $\alpha_0 = 0$ na relação (8).

Da equação (32) resulta

$$\dot{I}_R = - j \omega L_{SR\Delta} \left[\frac{1}{\frac{r_R}{s} + j \omega L_{RR\Delta}} \right] \dot{I}_S \quad . \tag{33}$$

Esta expressão pode escrever-se sob a forma

$$\dot{I}_R = (A + j B) \dot{I}_S = \sqrt{A^2 + B^2}\ \dot{I}_S\ \varepsilon^{j\beta} \tag{34}$$

em que, atendendo à igualdade (27), têm lugar as seguintes relações:

$$\left.\begin{aligned} A &= - \omega L_{RR\Delta} \frac{\omega L_{M\Delta}}{\left(\frac{r_R}{s}\right)^2 + (\omega L_{RR\Delta})^2} \\ B &= - \frac{r_R}{s} \frac{\omega L_{M\Delta}}{\left(\frac{r_R}{s}\right)^2 + (\omega L_{RR\Delta})^2} . \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

A partir das expressões (34) e (35) obtém-se a relação dos módulos dos vectores $\dot{I}_R$ e $\dot{I}_S$ e o ângulo $\beta = (\chi - \varphi)$ da sua desfasagem no tempo.

Os resultados são expressos pelas seguintes relações:

$$\left.\begin{aligned}
I_R &= +\sqrt{A^2 + B^2} \,.\, I_S = \omega L_{M\Delta} \cdot \frac{1}{+\sqrt{\left(\frac{r_R}{s}\right)^2 + \left(\omega L_{RR\Delta}\right)^2}} \,.\, I_S \,, \\
\cos\beta &= \frac{A}{+\sqrt{A^2 + B^2}} = -\omega L_{RR\Delta} \cdot \frac{1}{+\sqrt{\left(\frac{r_R}{s}\right)^2 + \left(\omega L_{RR\Delta}\right)^2}} \,, \\
\operatorname{sen}\beta &= \frac{B}{+\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{r_R}{s} \cdot \frac{1}{+\sqrt{\left(\frac{r_R}{s}\right)^2 + \left(\omega L_{RR\Delta}\right)^2}} \,, \\
\operatorname{sen}(2\beta) &= \frac{2}{\frac{r_R}{s\,\omega L_{RR\Delta}} + \frac{s\,\omega L_{RR\Delta}}{r_R}} \,.
\end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Tomando em linha de conta as relações (36) obtém-se a partir de (31) as seguintes expressões para o momento da máquina assíncrona trifásica:

a) Momento em função do escorregamento

$$T = p \,.\, 3\, I^2_S \frac{\omega L^2_{M\Delta}}{\left(\frac{r_R}{s}\right)^2 + \left(\omega L_{RR\Delta}\right)^2} \cdot \left(\frac{r_R}{s}\right) . \qquad (37)$$

b) Momento em função do ângulo β

$$T = p \,.\, \frac{3}{2}\, I^2_S \frac{L^2_{M\Delta}}{L_{RR\Delta}} \operatorname{sen}(2\beta) \,. \qquad (38)$$

Esta última expressão do momento resulta directamente da energia magnética se, tomando em linha de conta as relações (36), escrevermos a relação (28) sob a forma:

$$U = \frac{3}{2}\, I^2_S\, L_{SS\Delta} - \frac{3}{2}\, I^2_S \frac{L^2_{M\Delta}}{L_{RR\Delta}} \cos^2\beta \,. \qquad (39)$$

Das relações (30) e (39) obtém-se directamente a expressão (38).

III — Estados de equilíbrio livre

Consideramos os terminais do estator da máquina assíncrona ligados a uma tensão trifásica simétrica e o rotor ligado segundo o esquema da fig. (1).

Supomos que o rotor se encontra livre da acção de qualquer binário mecânico, quer seja de origem exterior à máquina assíncrona, quer seja devido à resistência do ar ou aos atritos. O binário mecânico que actua sôbre o veio da máquina assíncrona será portanto nulo. Nestas

circunstâncias designamos os estados de equilíbrio da máquina assíncrona por «estados de equilíbrio livre».

A estes estados de equilíbrio corresponde segundo a expressão (30) a equação:

$$T = + \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} \right)_{I = \text{const.}} . p = 0 \tag{40}$$

que condiciona, segundo a expressão (38), a relação:

$$\text{sen}\,(2\beta) = 0 \,. \tag{41}$$

Das expressões (36) resultam as relações:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Motor ou travão} & s > 0 & \left\{ \begin{array}{l} \cos\beta \leq 0 \\ \text{sen}\,\beta \leq 0 \end{array} \right. \\ \text{Gerador} & s < 0 & \left\{ \begin{array}{l} \cos\beta \leq 0 \\ \text{sen}\,\beta \geq 0 \,. \end{array} \right. \end{array}\right\} \tag{42}$$

Das relações (41) e (42) resultam os valores de β e por conseguinte os do escorregamento s que correspondem aos estados de equilíbrio:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Estados} \\ \text{de equilíbrio} \\ T = 0 \\ \left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right) = 0 \\ \text{sen}\,(2\beta) = 0 \end{array}\right\} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Motor ou travão} & \left\{ \begin{array}{l} \text{a)}\ \beta = -\frac{\pi}{2}\ ,\ \cos\beta = 0\ ,\ s = +0 \\ \text{b)}\ \beta = -\pi\ ,\ \cos\beta = -1\ ,\ s = +\infty \end{array} \right. \\ s > 0 & \\ \text{Gerador} & \left\{ \begin{array}{l} \text{a}_1)\ \beta = +\frac{\pi}{2}\ ,\ \cos\beta = 0\ ,\ s = -0 \\ \text{b}_1)\ \beta = +\pi\ ,\ \cos\beta = -1\ ,\ s = -\infty \end{array} \right. \\ s < 0 & \end{array} \right. \begin{array}{l} (43) \\ \\ (44) \end{array}$$

Vamos agora estudar a estabilidade dêstes estados de equilíbrio a partir da energia magnética.

A equação (30) exprime que o momento de natureza electrodinâmica actua num sentido tal, que conduz o sistema a aumentar a sua energia magnética. Um estado de equilíbrio livre é caracterizado segundo a equação (40) pela relação

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \beta} \right)_{I = \text{const.}} = 0 \,. \tag{45}$$

Daqui se conclue que um estado de equilíbrio estável corresponde a um máximo e um estado de equilíbrio instável a um mínimo da energia magnética.

Da equação (39) resulta:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} \right) = 3\, I_S^2 \frac{L^2_{M_\Delta}}{L_{RR_\Delta}} \cos\,(2\beta) \,. \tag{46}$$

Desta expressão tiram-se conclusões a respeito da estabilidade dos estados de equilíbrio correspondentes às relações (43) e (44).

Estado de equilíbrio *a*)

$$\left.\begin{array}{l}\beta = -\dfrac{\pi}{2} \\ s = +0\end{array}\right| \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2}\right)_{\beta = -\frac{\pi}{2}} < 0$$

Máximo da energia magnética.
Estado de equilíbrio estável.

A energia magnética possui um máximo para $\beta = -\frac{\pi}{2}$, $s = +0$ e portanto o estado de equilíbrio é estável. Das equações (36) e (39) obtém-se para êste estado de equilíbrio os seguintes resultados:

$$\dot{I}_R = 0 \quad , \quad U_{max} = \frac{3}{2} I^2_S \, L_{SS_\lambda} \quad . \tag{47}$$

Estado de equilíbrio *b*)

$$\left.\begin{array}{l}\beta = -\pi \\ s = +\infty\end{array}\right| \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2}\right)_{\beta = -\pi} > 0$$

Mínimo da energia magnética.
Estado de equilíbrio instável.

A energia magnética possue um mínimo para $\beta = -\pi$ e o estado de equilíbrio é portanto instável. A partir das equações (36) e (39) obtém-se os seguintes resultados que caracterizam o estado de equilíbrio:

$$\dot{I}_R = -\frac{L_{M_\lambda}}{L_{RR_\lambda}} \dot{I}_S \quad , \quad U_{min} = \frac{3}{2} I^2_S \, L_{SS_\lambda} \, \sigma \tag{48}$$

em que $\sigma = (1 - K^2)$ representa o coeficiente de dispersão e K o factor de ligação magnética entre o estator e o rotor.

Estado de equilíbrio a_1)

$$\left.\begin{array}{l}\beta = +\dfrac{\pi}{2} \\ s = -0\end{array}\right| \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2}\right)_{\beta = +\frac{\pi}{2}} < 0$$

Coïncide com o estado de equilíbrio *a*).

Êste estado de equilíbrio coïncide com o estado de equilíbrio *a*) e conduz portanto aos mesmos resultados expressos pelas relações (47). A maneira como o estado de equilíbrio é atingido é que é diferente nos dois casos: no caso *a*) o escorregamento $s = +0$ é atingido partindo de valores positivos (motor); no caso a_1) o escorregamento $s = -0$ é atingido por valores negativos (gerador).

Estado de equilíbrio b_1)

$$\left.\begin{array}{l}\beta = +\pi \\ s = -\infty\end{array}\right| \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2}\right)_{\beta = +\pi} > 0$$

Mínimo da energia magnética.
Estado de equilíbrio instável.

Êste estado de equilíbrio é, como o estado *b*), igualmente instável e conduz aos mesmos resultados expressos pelas relações (48). O escorregamento tende aqui para infinito por valores negativos enquanto que no caso *b*) tende para infinito por valores positivos.

Na fig. 3 encontra-se representado além do vector $\dot{I}_S$ o vector $\dot{I}_R$ na vizinhança dos estados de equilíbrio livre. O sentido do binário electrodinâmico encontra-se igualmente indicado nesta figura.

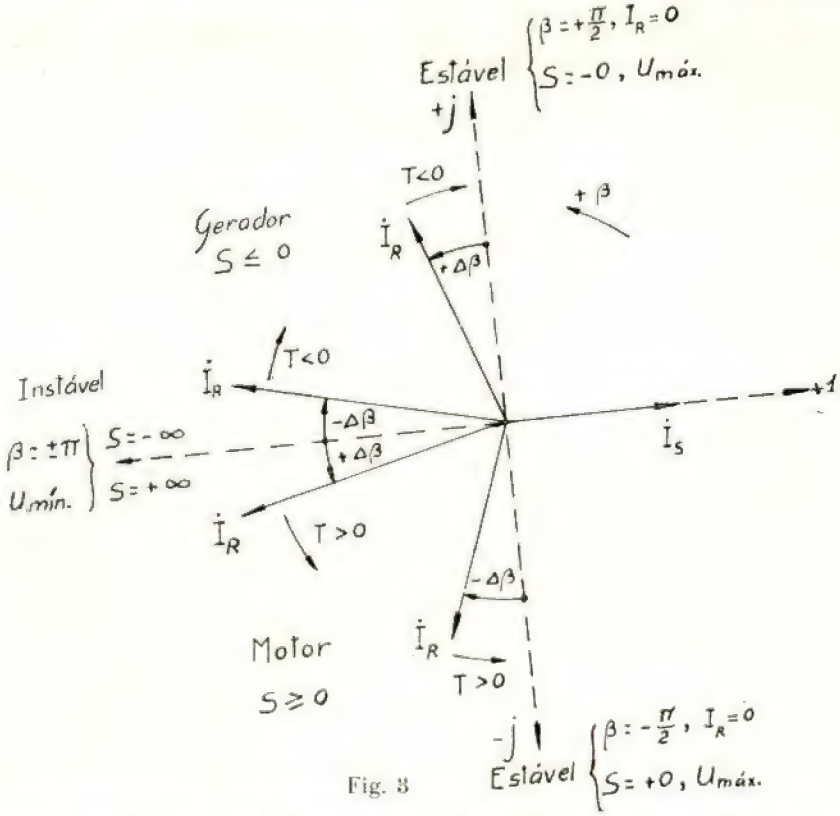


Fig. 3

O estudo que acabamos de fazer permite-nos interpretar sob o ponto de vista energético os fenómenos que se passam nas aplicações correntes da máquina assíncrona.

Quando se aplica nos terminais do estator da máquina assíncrona uma tensão trifásica e o rotor se encontra devidamente ligado, a máquina arranca e acelera até atingir uma velocidade angular próxima da velocidade de sincronismo $s = 0$. O seu funcionamento não se estabiliza exactamente na velocidade de sincronismo (máximo da energia magnética) devido à existência dum binário mecânico (atritos e resistência do ar) que actua sôbre o rotor. Sob o ponto de vista energético, podemos dizer que o rotor entra em movimento e acelera de maneira a tender para o estado de equilíbrio livre estável a que corresponde o máximo da energia magnética.

Fazendo actuar sôbre o rotor um binário mecânico exterior, a máquina assíncrona é obrigada a afastar-se do seu estado de equilíbrio livre ($T = 0$, $s = 0$) tanto quanto fôr necessário para criar um binário electrodinâmico que estabeleça o respectivo equilíbrio forçado.

Se o binário mecânico exterior actuar no sentido de rotação da máquina assíncrona, esta passará a funcionar com um escorregamento s negativo e terá portanto o carácter de gerador. Actuando o binário mecânico em sentido contrário, estabelece-se um escorregamento positivo que, sendo inferior à unidade, corresponde ao funcionamento como motor e sendo superior a ela corresponde ao funcionamento como travão.

Deixando de actuar sôbre o rotor o binário mecânico exterior, a máquina assíncrona tende a voltar de novo ao estado de equilíbrio livre correspondente ao máximo da sua energia magnética.

* * *

O cálculo dos binários electrodinâmicos e o estudo dos estados de equilíbrio livre a partir da energia magnética dos sistemas constitui um método geral, elegante e seguro. A publicação do trabalho presente pretende contribuir para despertar interêsse pela aplicação dêste método ao domínio da Electrotecnia.

A fotoelasticidade nos equilíbrios elásticos de revolução [1]

PELO ENG. CIVIL (I. S. T.) MANUEL ROCHA

ASSISTENTE DO I. S. T.
BOLSEIRO DO I. A. C.

Introdução

O engenheiro para utilizar a matéria com economia e segurança tem necessidade de conhecer a distribuïção das tensões elásticas que se desenvolvem nos corpos sólidos, em repouso ou movimento, submetidos à acção de fôrças.

A teoria da elasticidade reduz êste problema, no caso das pequenas deformações que são as que interessam às aplicações, à integração dum sistema de equações às derivadas parciais, com certas condições aos limites, que duma maneira geral é impossivel de efectuar; são contudo notáveis os progressos que neste domínio se têm efectuado nos últimos anos, tendo-se obtido a solução de alguns problemas que interessam ao engenheiro.

A dificuldade de integração das equações da teoria da elasticidade levou à criação de teorias particulares, reünidas sob a designação de resistência de materiais, que por serem baseadas em hipóteses simplificadoras não fornecem muitas vezes indicações suficientemente precisas tendo além disto um campo de aplicação restrito.

Por outro lado a carência de dados empiricos em virtude da rapidez com que actualmente mudam os tipos de máquinas e estruturas, o incremento das dimensões e custo das construções, e a importância sucessivamente crescente do factor económico, tornam cada vez mais necessária a existência de métodos mais rigorosos e mais gerais que os da resistência de materiais.

Para a determinação das tensões elásticas desenvolvidas nos sólidos deformados resta muitas vezes uma única solução: recorrer a métodos experimentais.

Dêstes o mais importante é o baseado sôbre a fotoelasticidade; outros métodos, como o de Begg e do indicador de momentos, baseados sôbre o teorema de Betti, o da determinação das tensões superficiais por meio de extensómetros, os baseados sôbre as analogias formais de certas equações diferenciais da hidrodinâmica e da electricidade com equações da elasticidade, etc., têm um campo de aplicação muito mais restrito.

Leis de fotoelasticidade

A fotoelasticidade tem por ponto de partida a descoberta feita em 1816 por David Brewster que reconheceu que os sólidos transparentes e isótropos são birefringentes quando sujeitos a deformações.

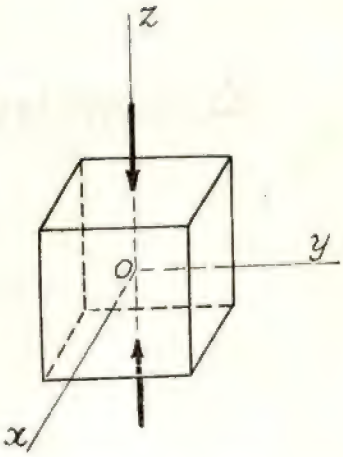
Assim consideremos um bloco de baquelite [2] pura com a forma dum prisma recto, e exerçamos sôbre as duas faces perpendiculares ao eixo Oz uma compressão uniformemente distribuída. As propriedades nas direcções Ox, Oy e Oz modificam-se, mantendo-se contudo

---

[1] Os dois últimos capítulos dêste trabalho fazem parte duma comunicação apresentada pelo autor ao XVI Congresso da Associação Espanhola para o Progresso das Ciências, que se realizou em Saragoça no corrente mês.

[2] A baquelite é uma resina sintética fenólica, transparente, muito usada nos trabalhos de fotoelasticidade; fabricada pela Bakelite Corp. de Nova York.

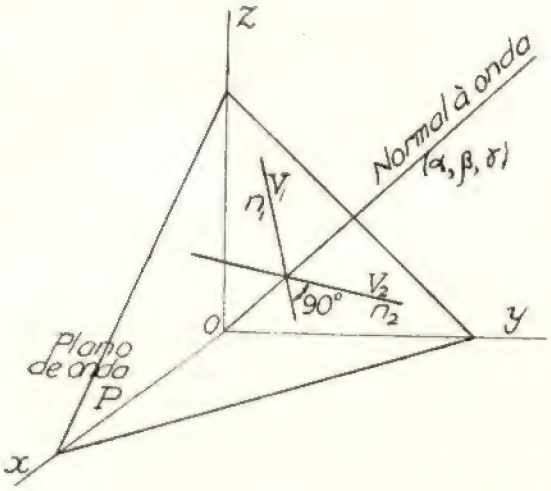
identidade de propriedades nas direcções Ox e Oy. A baquelite, primitivamente isótropa, tornou-se anisótropa com simetria de revolução em tôrno do eixo Oz; o bloco comporta-se como um cristal uniaxial [1] tendo o eixo Oz como eixo óptico.



No caso dum sólido deformado de qualquer modo, através de um elemento de volume suficientemente pequeno para que possa supor-se homogèneamente deformado, [2] a propagação da luz dá-se como através de um cristal biaxial [3].

O fim da fotoelasticidade, ramo da física, é estabelecer a relação entre as deformações e o efeito óptico resultante.

Vejamos como em geral se propagam as ondas luminosas planas num meio anisótropo transparente. Sejam α, β e γ os ângulos da normal à onda com 3 eixos de referência. Segundo cada direcção α, β, γ propagam-se duas ondas planas com velocidades v_1 e v_2 diferentes, isto é, índices de refracção n_1 e n_2 diferentes. Cada uma destas ondas transporta uma vibração transversal rectilineamente polarizada e de direcção determinada; as vibrações transportadas pelas duas ondas com a mesma normal são perpendiculares entre si. O problema da propagação das ondas planas num meio anisótropo consiste em determinar para cada direcção α, β, γ as duas velocidades ou os dois índices, e para cada vibração, isto é, para cada onda a direcção de vibração no plano de onda.



Êste problema é completamente resolvido pela consideração do chamado elipsóide de Fresnel ou dos índices.

A intercepção do elipsóide por um plano P, de normal α, β, γ, passando pelo seu centro é uma elipse; as direcções dos eixos desta elipse são as direcções das vibrações propagadas pelas duas ondas paralelas ao plano P, e as grandezas n_1 e n_2 dos semi-eixos são os índices de refracção correspondentes.

No caso da anisotropia do meio ser devida a deformação e portanto ao aparecimento de tensões, as direcções dos eixos do elipsóide dos índices e das quádricas das deformações e das tensões [4] coïncidem; a fotoelasticidade [5] fornece as seguintes leis:

I) As direcções de vibração correspondentes a um certo plano de onda são paralelas às direcções das deformações principais no plano da onda, isto é, aos eixos principais da secção da quádrica das deformações por um plano paralelo ao plano da onda.

II) A diferença das velocidades v_1 e v_2 de propagação das duas vibrações que têm o mesmo plano de onda é proporcional à diferença das deformações principais ε_1 e ε_2 no plano da onda:

[1] Ver «Optique cristalline, double réfraction», por H. Bouasse.

[2] Um sólido diz-se homogèneamente deformado quando as 6 correspondentes da deformação são as mesmas em todos os seus pontos.

[3] Ver «Optique cristalline, double refraction», por H. Bouasse.

[4] Ver «Théorie de l'élasticité», por S. Timoshenko.

[5] Ver «Photo-elasticity», por Coker e Filon, Camb. Univ. Press.

UM DOS ARCOS DE 40 METROS DA PONTE-VIADUTO DE ALCÂNTARA

AUTO-ESTRADA

UM ASPECTO DA CONSTRUÇÃO

PONTE SÔBRE O CAIA

PONTES

PONTE DA TROFA

UM DOS ARCOS

ESTRADA COIMBRA-FIGUEIRA

MAIORCA UMA DAS PONTES

$$v_1 - v_2 = k\ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\ ;$$

k depende da freqüência da vibração.

Estas leis foram estabelecidas por Neumann em 1841; a segunda é teòricamente aproximada, sendo contudo sempre verificada dentro da precisão actual das medidas.

Supondo que as deformações são elásticas e ainda que são lineares as relações entre as seis componentes da deformação e as seis da tensão elástica (lei de Hook), as leis anteriores tomam a forma:

I') As direcções de vibração correspondentes a um certo plano de onda são paralelas às tensões principais no plano da onda, isto é, paralelas às direcções da máxima e mínima tensões normais no plano da onda.

II') A diferença das velocidades de propagação das duas ondas é proporcional à diferença das tensões principais σ_1 e σ_2 no plano da onda:

$$v_1 - v_2 = k_1\ (\sigma_1 - \sigma_2)\ .$$

Ora os indices de refracção n_1 e n_2 das duas ondas são:

$$n_1 = \frac{v}{v_1} \quad \text{e} \quad n_2 = \frac{v}{v_2}\ ,$$

onde v representa a velocidade da luz no vácuo.

Portanto:

$$n_1 - n_2 = \frac{v}{v_1\ v_2}\ k_1\ (\sigma_2 - \sigma_1)\ .$$

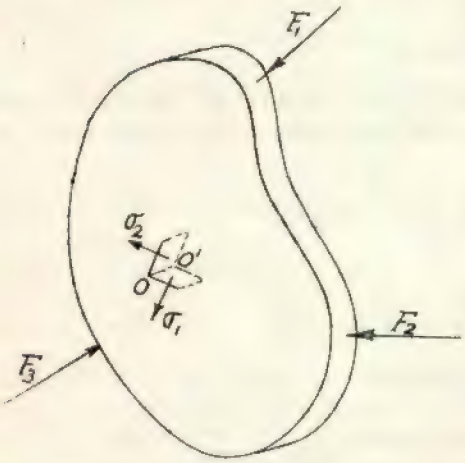
Visto v_1 e v_2 diferirem muito pouco de v pode escrever-se aproximadamente:

$$n_1 - n_2 = c\ (\sigma_2 - \sigma_1)\ ,$$

dependendo a constante c da freqüência da vibração.

Equilíbrios elásticos a duas dimensões

Consideremos uma placa delgada de espessura $\overline{OO'} = e$, de substância transparente, homogénea e isótropa, submetida a um sistema de fôrças $F_1, F_2, \ldots$, em equilíbrio, existentes num plano eqüidistante das duas faces da placa: é o que se chama um equilíbrio elástico plano ou a duas dimensões.



Uma onda luminosa plana incidindo num ponto O normalmente as faces da placa sofre, em virtude da birefringência resultante da deformação, uma dupla refracção. Como a incidência é normal as duas ondas refractadas são paralelas à onda incidente. Das leis I') e II') vem [1]:

I'') As direcções de vibração das duas ondas refractadas são paralelas às direcções das tensões principais σ_1 e σ_2 no ponto O.

II'') A diferença dos indices de refracção das duas ondas é proporcional à diferença das tensões principais:

$$n_1 - n_2 = c\ (\sigma_2 - \sigma_1)\ .$$

[1] Visto a placa ser de pequena espessura as condições de solicitação elástica não variam através a espessura $\overline{OO'}$ da placa.

Esta diferença dos índices de refracção das duas ondas origina à saída da placa uma diferença de marcha:

$$\delta = e\ (n_1 - n_2).$$

Portanto:

$$\delta = ce\ (\sigma_2 - \sigma_1).$$

Determinadas para cada ponto O as direcções de vibração das duas ondas emergentes da placa (interpondo esta entre dois nicóis cruzados) e a sua diferença de marcha δ (com um compensador), ficam conhecidas as direcções e a diferença das tensões principais.

A fotoelasticidade [1] dispõe de vários métodos para estabelecer outra relação entre σ_1 e σ_2, ficando assim completamente determinado o estado de solicitação elástica em qualquer equilíbrio a duas dimensões.

Equilíbrios elásticos a três dimensões

Um sólido transparente em equilíbrio elástico a três dimensões é na generalidade um meio de índice de refracção continuamente variável, visto o elipsóide dos índices variar duma maneira contínua de ponto para ponto do sólido; então é impossível resolver o problema da determinação das tensões elásticas a partir das leis da fotoelasticidade.

Recentemente foi descoberta uma propriedade das resinas sintéticas fenólicas tais como baquelite, marblette, trolon, etc., que fez voltar a atenção para as leis da fotoelasticidade para a determinação das tensões nos equilíbrios elásticos a três dimensões. Aqueçamos um corpo constituído por uma destas resinas até uma certa temperatura T [2] e apliquemos-lhe um sistema de fôrças; cada partícula do corpo torna-se birefringente devido à deformação que sofre; se arrefecermos o corpo até cêrca de 20° C. mantendo as fôrças actuantes, observa-se que a birefringência se mantém inalterável, mesmo depois de retiradas as fôrças.

Produz-se uma fixação da deformação e do conseqüente efeito óptico obtidos a alta temperatura. Êste fenómeno foi estudado por Hetényi [3] que estabeleceu a sua teoria.

G. Oppel [4] deu um passo decisivo verificando que a birefringência não é modificada quando se corta cuidadosamente o corpo; efectivamente dêste modo pode estudar-se o estado de solicitação elástica a que o corpo estava submetido à temperatura T, observando à temperatura ambiente as propriedades ópticas de partículas tiradas do corpo.

De facto Hiltscher [5] usando métodos cristalográficos e recorrendo às leis da fotoelasticidade, conseguiu determinar em cada parte do corpo as direcções das tensões principaiss σ_1, σ_2 e σ_3 e as diferenças das suas grandezas $\sigma_1 - \sigma_2$, $\sigma_1 - \sigma_3$ e $\sigma_2 - \sigma_3$.

A circunstância de obter sòmente a diferença das tensões principais e não as próprias tensões provém directamente da forma da lei II').

Equilíbrios elásticos de revolução

Não conhecemos nenhum método geral, mesmo sem ser baseado na fotoelasticidade, para a determinação experimental das tensões elásticas nos equilíbrios a três dimensões; no

---

(1) Ver «Photo-elasticity for engineers», por Filon, Camb. Univ. Press., 1936; e «Photo-elasticity», por Coker e Filon, Camb. Univ. Press., 1931.

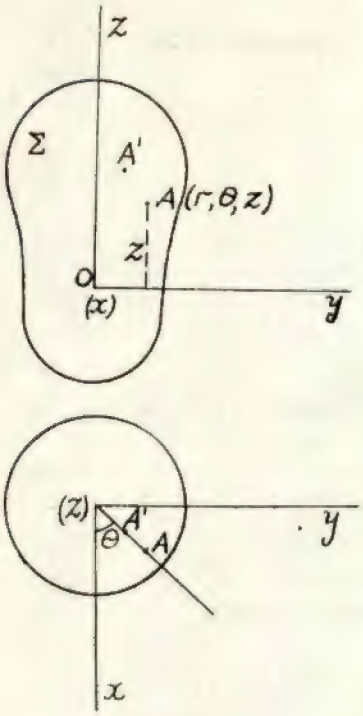
(2) Para a baquelite T é cêrca de 110° C. e para o trolon cêrca de 80° C. À temperatura T as resinas sintéticas fenólicas mantêm-se perfeitamente elásticas mas o seu módulo de elasticidade é muito mais pequeno do que à temperatura ambiente: é a chamada alta elasticidade descoberta por Houwink; ver «Elasticity, Plasticity and Structure of Matter», por Houwink, Camb. Univ. Press., 1937.

(3) Ver «Photoelastic Studies of Three — Dimensional Stress Problems», apresentado ao 5.° Congresso Internacional de Mecânica Aplicada (1938), por Hetényi; dêste autor ver também «The Fundamentals of Three — Dimensional Photoelasticity», Journal of Applied Mechanics, Dezembro-1938.

(4) Ver «The Photoelastic Investigation of Three — Dimensional Stress and Strain Conditions», por G. Oppel, Technical Memorandum, n.° 824, National Advisory Committee for Aeronautics, U. S. A., Abril de 1937.

(5) «Polarisationsoptische Untersuchung des raümlichen Spannungszustandes im konvergenten Licht», por Hiltscher, Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, vol. 9, n.° 2, pg. 91-108.

entanto no caso dum corpo Σ de revolução em tôrno dum eixo Oz deformado simètricamente em relação ao eixo de revolução, estabelecemos duas equações diferenciais que permitem determinar em cada ponto os valores de σ_1, σ_2 e σ_3 das tensões principais, isto é, levantar a indeterminação que existia quando se conheciam sòmente as diferenças $\sigma_1 - \sigma_2$, $\sigma_1 - \sigma_3$ e $\sigma_2 - \sigma_3$.



O caso citado é o dos cilindos submetidos a pressões interiores e exteriores, das placas circulares submetidas a fôrças simètricamente distribuídas em relação ao eixo da placa, do disco animado de movimento de rotação, do sólido semi-indefinido submetido a fôrças exercidas por uma esfera, um cilindro, etc.

Vamos estabelecer essas equações:

Num ponto A do sólido Σ de coordenadas cilíndricas r, θ e z, por razão de simetria, duas das tensões principais σ_1 e σ_2 existem na secção meridiana que passa por A e a terceira σ_3 é perpendicular a êste plano, sendo as suas grandezas independentes de θ.

Na secção meridiana definida por A consideremos os dois pares de curvas isostáticas [1] que passam por êste ponto e por outro vizinho A'.

Vamos estabelecer as condições de equilíbrio de translação do elemento de volume definido por dois planos meridianos eqüidistantes de A fazendo entre si um ângulo $d\theta$, e pelas superfícies isostáticas que passam pelas curvas isostáticas consideradas.

Projectemos sôbre $\overline{AB} = ds_1$ as fôrças actuantes nas seis faces do elemento de volume, tomando como sentido positivo sôbre $\overline{AB}$ o de A para B.

A projecção da fôrça actuante sôbre a face que passa por $\overline{AB}$ é nula.

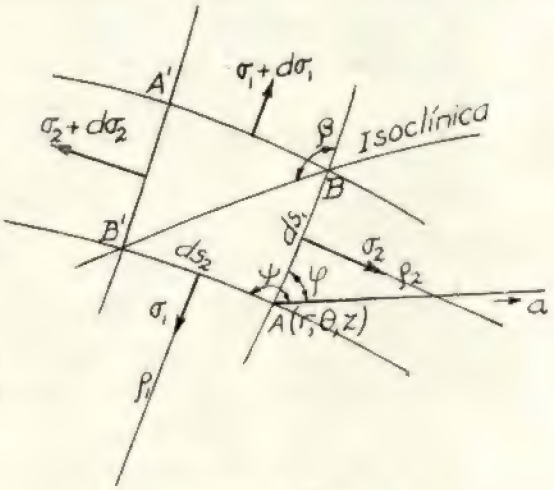
A fôrça actuante sôbre a face que passa por $\overline{AB'} = ds_2$ tem a projecção:

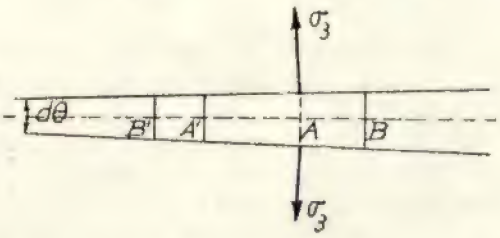
$$-\frac{1}{2}\sigma_1 \, ds_2 \left[r\,d\theta + \left(r + \frac{\partial r}{\partial s_2} ds_2 \right) d\theta \right],$$

visto a face se poder assimilar a um trapézio de altura ds_2 e bases $r\,d\theta$ e $\left(r + \frac{\partial r}{\partial s_2} ds_2 \right) d\theta$.

Se designarmos por φ o ângulo, no ponto A, da isostática $\overline{AB}$ com a direcção $\overline{Aa}$ do plano meridiano que é perpendicular ao eixo de revolução Oz, e por ρ_2 o raio de curvatura, no ponto A, da isostática $\overline{AB'}$, é:

$$ds_2 = \rho_2 \, d\varphi,$$





[1] Por cada ponto dum sólido submetido a tensões elásticas passam três curvas tangentes às tensões principais nesse ponto; são designadas curvas isostáticas.

e portanto a expressão anterior pode escrever-se:

$$1) \qquad -\frac{1}{2}\sigma_1 \rho_2 \left(2r + \frac{\partial r}{\partial s_2}\rho_2 \, d\varphi\right) d\varphi \, d\theta \, .$$

A fôrça actuante sôbre a face que passa por $\overline{A'B}$ fornece a contribuïção:

$$2) \qquad \frac{1}{2}\left(\sigma_1 + d\sigma_1\right)\left(\rho_2 + ds_1\right) d\varphi \left(2r + 2\frac{\partial r}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial r}{\partial s_2} ds_2\right) d\theta \, ,$$

em virtude dos arcos $\overline{AB'}$ e $\overline{BA'}$ se poderem supor paralelos.

Relativamente à face definida por $\overline{A'B'}$, a contribuïção é:

$$3) \qquad -\frac{1}{2}\left(\sigma_2 + d\sigma_2\right) ds_1 \left(2r + 2\frac{\partial r}{\partial s_2} ds_2 + \frac{\partial r}{\partial s_1} ds_1\right) d\theta \, d\varphi \, .$$

Finalmente a projecção da resultante das fôrças actuantes sôbre as faces, que fazem entre si o ângulo $d\theta$, é:

$$4) \qquad -\sigma_3 \, ds_1 \, ds_2 \, d\theta \cos\varphi \, ,$$

pois a resultante das duas fôrças é dirigida segundo $\overline{Aa}$.

Somando as projecções 1), 2), 3) e 4), e efectuando as operações vem:

$$\left(\sigma_1 \, ds_1 + \rho_2 \, d\sigma_1\right) r + \sigma_1 \rho_2 \frac{\partial r}{\partial s_1} ds_1 - \sigma_2 \, r \, ds_1 - \sigma_3 \rho_2 \cos\varphi \, ds_1 = O \, ,$$

visto supormos o elemento de volume em equilibrio sob a acção das tensões elásticas; desprezámos as fôrças mássicas.

Atendendo a que:

$$\frac{\partial r}{\partial s_1} = \cos\varphi \, ,$$

vem:

$$5) \qquad \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} + \frac{1}{\rho_2}(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{\cos\varphi}{r}(\sigma_1 - \sigma_3) = 0 \, .$$

Análogamente se projectarmos as fôrças sôbre a direcção $\overline{AB'}$, obtemos a equação:

$$6) \qquad \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} - \frac{1}{\rho_1}(\sigma_2 - \sigma_1) + \frac{\cos\psi}{r}(\sigma_2 - \sigma_3) = 0 \, ,$$

onde $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$.

Transformemos as equações anteriores de modo a evitar o aparecimento dos raios de curvatura ρ_1 e ρ_2 cuja determinação gráfica é difícil.

Ora:

$$ds_1 = \rho_1 \, d\psi \, ,$$
$$ds_2 = \rho_2 \, d\varphi \, .$$

Portanto de 5) vem:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \psi} + \frac{\rho_1}{\rho_2}(\sigma_1 - \sigma_2) + \rho \frac{\cos\varphi}{r}(\sigma_1 - \sigma_3) = 0 \, .$$

Suponhamos que o ponto A' foi escolhido de tal modo que B e B' existem sôbre a mesma isoclínica [1]; então:

$$d\psi = d\varphi$$

ou:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{ds_1}{ds_2} \quad .$$

Portanto:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = -\operatorname{cotg}\beta$$

sendo β o ângulo da isoclinica com a isostática correspondente a σ_1.

Portanto:

$$7) \qquad \frac{\partial \sigma_1}{\partial \psi} - \operatorname{cotg}\beta\,(\sigma_1 - \sigma_2) + \rho_1 \frac{\cos\varphi}{r}(\sigma_1 - \sigma_3) = 0 \quad .$$

Na expressão do raio de curvatura:

$$\rho_1 = \frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 z}{dr^2}} \quad ,$$

é

$$\frac{dz}{dr} = \operatorname{tg}\varphi$$

e

$$\frac{d^2 z}{dr^2} = \sec^2\varphi \frac{d\varphi}{dr} \quad .$$

Portanto:

$$\rho_1 = \frac{\sec\varphi}{\frac{d\varphi}{dr}};$$

substituindo êste valor em 7), vem:

$$8) \qquad \frac{\partial \sigma_1}{\partial \psi} = \operatorname{cotg}\beta\,(\sigma_1 - \sigma_2) - \frac{\partial(\log r)}{\partial \varphi}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad .$$

E do mesmo modo de 6), vem:

$$9) \qquad \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varphi} = -\operatorname{cotg}^{-1}\beta\,(\sigma_2 - \sigma_1) - \frac{\partial(\log r)}{\partial \psi}(\sigma_2 - \sigma_3) \quad .$$

Estas equações juntamente com as leis da fotoelasticidade vão-nos servir para a determinação das tensões principais σ_1, σ_2 e σ_3 em cada ponto do sólido Σ.

Suponhamos então que ao sólido Σ, cuja substância é uma resina fenólica, são aplicadas as fôrças à temperatura conveniente T; já vimos que se arrefecermos o sólido o efeito óptico obtido a alta temperatura subsiste mesmo depois de retiradas as fôrças, e portanto estudando êste efeito poderemos determinar as tensões elásticas desenvolvidas à temperatura T.

Efectivamente, do sólido Σ com a «birefringência fixada» cortemos uma lâmina de pequena espessura, e, passando pelo eixo de revolução. Se, tal como fez G. Oppel [2], fizermos incidir num ponto A, normalmente às faces da lâmina, uma onda luminosa plana rectilinea-

[1] Curva ao longo da qual as tensões principais têm a mesma direcção.

[2] Ver referência (4) da pg. 68.

mente polarizada fornecida por um analisador, ela refracta-se, e dá origem a duas outras também planas e rectilineamente polarizadas cujas direcções de vibração são rectangulares; com um compensador e um analisador podem determinar-se as direcções de vibração das duas ondas refractadas e o atrazo δ duma em relação à outra à saída da lâmina, e portanto, com o auxílio das leis I') e II'), determinar no ponto A as direcções e a diferença $\sigma_1 - \sigma_2$, das tensões principais cujo plano é paralelo às faces da lâmina.

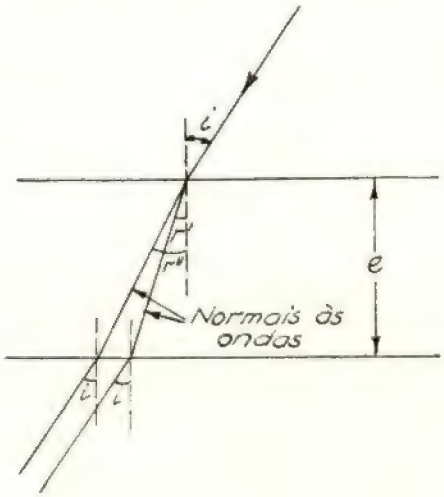
O ângulo β que figura nas equações 8) e 9) determina-se fàcilmente a partir do conhecimento experimental das isostáticas e das isoclínicas [1]; ao longo das isostáticas é fácil determinar gràficamente os valores de $\frac{\partial (\log r)}{\partial \varphi}$ e $\frac{\partial (\log r)}{\partial \psi}$.

Resta determinar em cada ponto da lâmina os valores de $\sigma_1 - \sigma_3$ e $\sigma_2 - \sigma_3$.

Para a determinação das diferenças das tensões principais Hiltscher usa a luz convergente.

Vamos ver que no caso particular do sólido Σ, a lâmina anteriormente considerada observada em luz paralela também nos serve para a determinação de $\sigma_1 - \sigma_3$ e $\sigma_2 - \sigma_3$.

Efectivamente façamos incidir sôbre a lâmina uma onda plana rectilineamente polarizada; seja i o ângulo de incidência e suponhamos que a normal à onda existe no plano definido por σ_1 e σ_3, isto é, existe num plano principal do elipsóide dos índices. Às duas ondas refractadas corresponderão raios luminosos existentes no plano de incidência em virtude da simetria da superfície de onda no meio anisótropo.



As direcções de vibração das duas ondas são perpendiculares entre si; uma das direcções existe no plano da incidência e a outra é normal a êste plano.

Depois de emergirem da lâmina os planos das duas ondas são paralelos entre si e apresentam uma diferença de marcha δ' que depende de i' e dos índices de refracção n' e n'' correspondentes às duas ondas refractadas. É:

$$\delta' = e\ (n'' \cos r'' - n' \cos r');$$

entre os ângulos de refracção r' e r'' existe a relação:

$$n'' \operatorname{sen} r'' = n' \operatorname{sen} r'$$

fornecida pela segunda lei de Descartes.

Atendendo a que na birefringência devida a deformação a diferença $n'' - n' = \varepsilon$ é sempre muito pequena, da expressão anterior vem:

$$\operatorname{sen} r'' = \operatorname{sen} r' \left(1 - \frac{\varepsilon}{n'}\right),$$

donde:

$$\cos r'' = \cos r' \left(1 + \frac{\varepsilon}{n'} \operatorname{tg}^2 r'\right).$$

Portanto:

$$\delta' = e \cos r' \left[n'' \left(1 + \frac{\varepsilon}{n'} \operatorname{tg}^2 r'\right) - n'\right].$$

---

[1] Ver referência (1) da pg. 68.

Supondo i tal que r' seja aproximadamente igual a 45°, vem:

$$\delta' = \sqrt{2}\ e\ (n'' - n') .$$

Medido δ' com um compensador, calcula-se $n'' - n'$ e portanto a diferença das tensões principais no plano das ondas refractadas que formam entre si um ângulo muito pequeno em virtude de $n'' - n'$ ser infinitesimal.

Os valores, dados pela teoria da elasticidade, das tensões principais num plano fazendo um ângulo de 45° com as faces da lâmina e perpendicular ao plano definido por σ_1 e σ_3, são:

$$\sigma_2 \quad e \quad \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} .$$

Logo:

$$\delta' = \sqrt{2}\ e\ c \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right),$$

ou

$$\delta' = \frac{\sqrt{2}}{2}\ e\ c\ [2\ (\sigma_2 - \sigma_1) - (\sigma_3 - \sigma_1)] .$$

Ora δ', e, c e $\sigma_2 - \sigma_1$ são conhecidos; portanto podemos tirar desta expressão o valor de $\sigma_1 - \sigma_3$ e conseqüentemente conhecer também $\sigma_2 - \sigma_3$.

Temos determinadas tôdas as grandezas que figuram nos segundos membros das equações 8) e 9).

Integrando a equação 8) ao longo duma isostática correspondente a σ_1, vem:

$$(10) \qquad \sigma_1 = (\sigma_1)_0 + \int_{\psi_0}^{\psi} \left[\cot g\ \beta\ (\sigma_1 - \sigma_2) - \frac{\partial (\log r)}{\partial \psi} (\sigma_1 - \sigma_3) \right] d\ \psi ,$$

sendo $(\sigma_1)_0$ o valor da tensão σ_1 no ponto A_0 onde $\psi = \psi_0$.

Suponhamos que A_0 é um ponto da superfície do sólido; visto as tensões na superfície serem geralmente conhecidas, $(\sigma_1)_0$ é determinado. Então a equação 10), por integração gráfica, daiá o valor de σ_1 num ponto qualquer da isostática que termina em A_0.

Conhecida a tensão principal σ_1, podem determinar-se σ_2 e σ_3 visto serem conhecidas as diferenças $\sigma_1 - \sigma_2$ e $\sigma_1 - \sigma_3$.

Semelhantemente da equação 9), vem:

$$\sigma_2 = (\sigma_2)_0 + \int_{\psi_0}^{\psi} \left[- \cot g^{-1} \beta\ (\sigma_2 - \sigma_1) - \frac{\partial (\log r)}{\partial \psi} (\sigma_2 - \sigma_3) \right] d\ \psi ,$$

que permite também calcular σ_2 e portanto σ_1 e σ_3.

Temos assim um método que permite a determinação das tensões principais σ_1, σ_2 e σ_3 num ponto qualquer dum sólido de revolução simètricamente deformado em relação ao eixo da revolução.

Movimento permanente gradualmente variado
Estudo Geral do Regolfo

I — Caudal constante.

PELO ENG. CIVIL (I. S. T.) ALBERTO ABECASIS MANZANARES

Êste artigo faz parte de um trabalho mais extenso, feito pelo autor durante o seu estágio, como bolseiro do «Instituto para a Alta Cultura», no laboratório de hidráulica anexo à Escola Politécnica Federal de Zurich. Devido a isto, encontram-se no seu texto referências a outras partes do mesmo trabalho; procurou-se, contudo, ao publicar êste capítulo imprimir-lhe a clareza duma publicação isolada. Trata-se dum estudo completamente original baseado na teoria da linha da energia. Espera o autor poder posteriormente publicar o trabalho completo de que êste artigo constitui o 2.º capítulo.

Examinando o que tem sido feito até hoje no estudo e resolução da questão do regolfo encontramos que, àparte a resolução do problema por tentativas sucessivas aproveitando o método das diferenças finitas e baseando-se na equação fundamental de Bernouilli aplicada às correntes onde existe um esfôrço resistente oposto ao movimento, pouco se tem feito. Considerando em primeiro lugar os canais prismáticos com caudal constante e filetes rectilíneos ou assemelháveis, vemos que não existe nenhum método de resolução geral do assunto. Conhecemos, para os canais rectangulares de largura muito grande, a equação de Bresse que, integrada e posta em tabelas, nos fornece a curva do regolfo neste caso. No caso do regolfo de depressão no mesmo canal rectangular muito largo, Schaffernak deduziu umas tabelas semelhantes. Foi também achada e integrada a equação no caso do perfil triangular por Puppini, no perfil parabólico por Tolkmitt e no perfil rectangular não muito largo por Masoni. Bakmethef e Evangelisti, utilizando artifícios de cálculo, encontraram solução para o caso da secção trapézia; algumas destas soluções têm certos defeitos, como veremos mais tarde.

O problema não tem sido resolvido duma maneira geral, e isto obriga a que, quando se pretende encontrar a curva do regolfo formado num canal de secção qualquer, é necessário recorrer ao cálculo das diferenças finitas, ou em geral assimilá-lo a um canal rectangular muito largo ou outro e aplicar as tabelas respectivas, com evidente prejuizo da exactidão.

Pensei que talvez partindo da teoria da linha de energia fôsse possivel encontrar uma expressão geral válida para qualquer secção, e efectivamente cheguei a estabelecê-la. Consegui, ainda, empregando coordenadas adimensionais, e utilizando um único ábaco, resolver pràticamente e com a aproximação que se quiser o problema da determinação da curva do regolfo num canal qualquer, tudo isto de forma relativamente simples.

O método utilizado tem ainda a vantagem de, como veremos a seguir, ser generalizável aos outros casos de regolfo em que o caudal ou a inclinação não são constantes, ou ainda quando intervém uma certa curvatura dos filetes líquidos.

Vamos então a estudar agora uma solução geral do problema do regolfo para um perfil

À DIREITA: PONTE DE BALANÇA

EM BAIXO: PONTE DE ENTRE-OS-RIOS

PONTES

À DIREITA: PONTE "VIERENDEEL"

NA ESTRADA

MANTEIGAS-CALDAS SANTAS

CAMPOS DE ALVEGA

●

PONTE-CANAL
DO
CONDUTOR
GERAL

HIDRÁULICA AGRÍCOLA

CAMPOS DE ALVEGA

●

EM CIMA: ESTAÇÃO ELEVADORA
NA ORIGEM DO CONDUTOR GERAL

À ESQUERDA: COMPORTA
E TOMADA DE ÁGUA
NO CONDUTOR GERAL

prismático de forma qualquer. Consideraremos, por agora o caudal e a inclinação do leito constantes.

Antes de entrar pròpriamente no problema vamos fazer um resumo das notações empregadas a seguir:

Q = caudal total
q = caudal por metro de largura
Ω = secção líquida
χ = perímetro molhado
$R = \frac{\Omega}{\chi}$ = Raio médio ou hidráulico
s = comprimento, medido ao longo do eixo do canal, a partir duma origem
z = ordenada dum ponto do líquido, medida sôbre o ponto mais baixo do fundo do canal, na secção considerada
h = altura ou ordenada da superfície livre medida como z
b = largura da secção líquida a superfície
H = altura da linha da energia total medida como as anteriores
V = velocidade de componentes u, v, w
V_m = velocidade média = U
c = coeficiente de atrito (Chezy)
k = coeficiente de atrito (Strickler)
i = inclinação do fundo do canal ou do leito
J = inclinação da superfície líquida
J_e = inclinação da linha da energia
α, α', β = coeficientes já definidos. [Energia cinética, quantidade de movimento e distribuïção não hidrostática das pressões]
x = abcissa horizontal do escoamento
$y = y(x)$ = equação da linha de talweg.

Para indicar os valores correspondentes aos movimentos uniforme e critico empregaremos os índices *u* e *c*. Assim h_u e h_c indicarão as alturas correspondentes aos regimes uniforme e crítico.

Recordemos a expressão mais geral da energia total ou da altura da linha de energia

$$H = \beta h + \frac{\alpha U^2}{2g} \qquad (12)$$

Neste primeiro estudo já dissemos que vamos supor o paralelismo e a rectidão dos filetes líquidos, quere dizer, faremos $\beta = 1$ permanentemente. Ao segundo coeficiente α será dado um valor sensìvelmente constante, mas diferente da unidade, dependente única e exclusivamente da turbulência.

Recordaremos ainda que $Q = U\Omega$ e que, como consideramos um canal prismático, a área de secção líquida Ω será ùnicamente função da altura líquida h

$$\Omega = \Omega(h)$$

Então a derivada da secção Ω em relação a s tem a seguinte expressão

$$\frac{d\Omega}{ds} = \frac{d\Omega}{dh}\frac{dh}{ds} = b\frac{dh}{ds} \qquad (23)$$

por ser $\frac{d\Omega}{dh} = b$

A expressão da energia pode escrever-se

$$H = \beta h + \frac{\alpha Q^2}{2g\Omega^2} = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\Omega^2} \text{ supondo } \beta = 1$$

e podemos obter a expressão do caudal

$$Q = \Omega\sqrt{\frac{2g}{\alpha}(H - h)} \qquad (24)$$

Ora tendo em conta, como vimos no primeiro capitulo, que a expressão (12) e portanto a (24) tem de ser verificadas em todos os pontos da corrente líquida ou do regolfo, e que por outra parte êste, no caso presente, é caracterizado por um caudal constante, vemos que a expressão

$$\frac{dQ}{ds} = 0 \qquad (25)$$

servirá para caracterizar o fenómeno do regolfo qualquer que seja a secção Ω.

Antes de continuar, vamos fazer uma pequena digressão, recordando algumas noções já conhecidas da hidráulica.

Voltemos à equação (6) que no caso do movimento permanente se escreve

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\alpha U^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + z\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\alpha U^2}{2g} + h + z\right) = -J_e \qquad (26)$$

Nesta equação z representa a ordenada do fundo do canal em relação a uma horizontal e então

$$\frac{\partial z}{\partial s} = i$$

e portanto

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\alpha U^2}{2g} + h\right) = \frac{\partial H}{\partial s} = i - J_e$$

É necessário ter em conta que a derivada anterior é parcial quando o tempo intervém, mas no nosso caso de permanência do movimento podemos escrever.

$$\frac{dH}{ds} = i - J_e \qquad (27)$$

Nos nossos cálculos partiremos da hipótese, geralmente admitida, de que a perda de energia ou de carga total J_e tem a mesma expressão no movimento permanente do que no movimento uniforme e que a ela é dada pela fórmula, mais simples, de Chezy

$$J_e = \frac{U^2}{c^2 R} \qquad (28)$$

Poderíamos ter empregado outras fórmulas: Ganguillet et Kutter, Gaucler e Strickler, (hoje vulgarmente empregada) etc. ou mesmo a equação geral preconizada pelos hidrodinâmicos

$$J_e = \frac{1}{2g}\lambda\frac{U^2}{R}$$

na qual λ é um número que depende da rugosidade relativa $\frac{\varepsilon}{R}$ e do número de Reynolds $\frac{U \cdot R}{\nu}$, sendo ε um comprimento que representa a rugosidade absoluta das paredes e do fundo, e ν a viscosidade cinemática da água; empregamos porém a fórmula de Chezy, como aliás quási sempre se faz quando se trata de êste assunto, por uma questão de facilidade de cálculo.

Escrevamos então que na expressão (24) deve ser $\frac{dQ}{ds} = 0$, teremos

$$\frac{dQ}{ds} = \sqrt{\frac{2g}{\alpha}}\left[\frac{d\Omega}{ds}\sqrt{H-h} + \Omega\frac{\frac{d}{ds}(H-h)}{2\sqrt{H-h}}\right] = 0 \qquad (29)$$

ou

$$2b\frac{dh}{ds}(H-h) + \Omega\left(\frac{dH}{dS} - \frac{dh}{ds}\right) = 0$$

e tendo em conta as equações (27) e (12) podemos escrever:

$$2b\frac{dh}{ds}\frac{\alpha Q^2}{2g\Omega^2} + \Omega i - \Omega J_e - \Omega\frac{dh}{ds} = 0$$

ou desembaraçando $\frac{dh}{ds}$

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\Omega i - \Omega J_e}{\Omega - b\frac{\alpha Q^2}{g\Omega^2}} = i\frac{\Omega - \Omega\frac{J_e}{i}}{\Omega - b\frac{\alpha Q^2}{g\Omega^2}} \qquad (30)$$

Recordemos agora que a perda de carga é dada pela fórmula (28) e que no caso do movimento uniforme a linha de energia é paralela ao fundo do canal, teremos:

$$J_e = \frac{Q^2}{c^2\Omega^2 R} \qquad i = \frac{Q^2}{c^2\Omega^2_u R_u}$$

e portanto

$$\frac{J_e}{i} = \frac{\Omega^2_u R_u}{\Omega^2 R} \qquad (31)$$

Por outra parte e recordando a expressão (15) em relação à secção crítica sabemos que

$$\frac{\alpha Q^2}{g}\frac{b_c}{\Omega^3_c} = 1$$

e portanto o segundo têrmo do denominador de (30) pode escrever-se

$$\frac{b}{\Omega^2}\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{b}{\Omega^2}\frac{\Omega^3_c}{b_c} = \frac{\Omega^2_c R_c}{\Omega^2 R}\frac{b}{b_c}\frac{\chi_c}{\chi} \qquad (32)$$

e substituindo em (30), multiplicando numerador e denominador por ΩR obtém-se

$$\frac{dh}{ds} = i\frac{\Omega^2 R - \Omega^2_u R_u}{\Omega^2 R - \Omega^2_c R_c\frac{b\chi_c}{b_c\chi}} \qquad (33)$$

ou ainda, desprezando o factor $\frac{b\chi_c}{b_c\chi}$ como vamos justificar.

$$\boxed{\frac{dh}{ds} = i\,\frac{\Omega^2 R - \Omega^2_u R_u}{\Omega^2 R - \Omega^2_c R_c}} \qquad (34)$$

Esta expressão, desde que nós justifiquemos o facto de ter desprezado o factor $\frac{b\,\chi_c}{b_c\,\chi}$, é da mais ampla generalidade; ela, com efeito, não nos introduz nenhuma limitação de forma da secção, visto que para tôdas as secções é possível definir às condições críticas e uniformes. Devemos ainda fazer a advertência de que, a-pesar-de desprezar o referido factor, a nossa fórmula coïncide com as fórmulas já existentes para os diferentes casos particulares e ainda aperfeiçoa alguma, como a de Tolkmitt.

Vamos justificar a aproximação feita: Examinando a expressão (33) observamos que o êrro cometido fica ùnicamente no denominador. Vê-se imediatamente que para estados muito próximos do crítico o termo $\frac{\chi_c\,b}{b_c\,\chi}$ é quási exactamente igual à unidade e o êrro cometido insignificante, isto é, quási nulo. Para estados mais afastados do crítico, o termo mencionado vai diferindo pouco a pouco da unidade, mas sempre relativamente pouco; mas, nestes casos o termo $\Omega^2 R$ é bastante maior que $\Omega^2_c R_c$ e o êrro cometido é também desprezível

Vamos fazer o cálculo do êrro para um caso particular. O leitor poderá repetir o cálculo para quaisquer outras condições com a certeza de que encontrará sempre um êrro desprezível, tanto mais tendo em conta os erros próprios dos cálculos que estamos a proceder, devidos a inumeráveis causas.

Suponhamos um canal trapézio cujas margens tenham a inclinação $m = 1$. Tomemos a altura crítica como unidade de dimensões. Seja $b_o = 4$ a largura do fundo e suponhamos que a altura da água numa secção determinada é igual a 2, isto é, dupla da altura crítica. Calculemos os diferentes termos que figuram no denominador da equação (33); façamos os cálculos também para $h = 1{,}1$, valor próximo da altura crítica.

$$\Omega = (b_o + m\,h)\,h$$

	$h_c = 1$	$\Omega_c = 5$
a)	$h = 2$	$\Omega = 12$
b)	$h = 1{,}1$	$\Omega = 5{,}61$

$$\chi = b_o + 2\,h\sqrt{1 + m^2} \qquad R = \frac{\Omega}{\chi}$$

	$\chi_c = 6{,}83$	$R_c = 0{,}73$
a)	$\chi = 9{,}65$	$R = 1{,}24$
b)	$\chi = 7{,}11$	$R = 0{,}79$

$$b = b_o + 2\,m\,h$$

	$b_c = 6$	$\Omega^2_c\,R_c = 18{,}25$
a)	$b = 8$	$\Omega^2\,R = 178{,}56$
b)	$b = 6{,}2$	$\Omega^2\,R = 24{,}90$

Calculemos os termos correctivos nos dois casos:

$$a)\ \frac{6{,}83 \times 8}{9{,}65 \times 6} = 0{,}945 \qquad b)\ \frac{6{,}83 \times 6{,}2}{7{,}11 \times 6} = 0{,}995$$

Comparemos, agora, nos dois casos o valor do denominador da expressão (33) com e sem termo corrector:

$$a)\ 178{,}50 - 18{,}25 = 160{,}25$$
$$178{,}50 - 18{,}25 \times 0{,}945 = 161{,}25$$

Êrro relativo:

$$E = \frac{\frac{1}{161{,}25} - \frac{1}{160{,}25}}{\frac{1}{161{,}25}} = -0{,}007$$

$$b)\ 24{,}90 - 18{,}25 = 6{,}65$$
$$24{,}90 - 18{,}25 \times 0{,}995 = 6{,}74$$

$$E = \frac{\frac{1}{6{,}74} - \frac{1}{6{,}65}}{\frac{1}{6{,}74}} = -0{,}012$$

Como vemos, no caso em que o êrro existe, êle é perfeitamente desprezível.

É necessário fazer uma advertência: No caso das secções fechadas progressivamente na sua parte superior, como são as circulares, a largura superficial diminue ao mesmo tempo que o perímetro molhado aumenta e então o termo $\frac{b\,\chi_c}{b_c\,\chi}$ pode ter, segundo as condições, valores bastante diferentes da unidade. Nestas secções e no caso em que o regolfo actue

na parte superior que estreita progressivamente, será bom verificar a grandeza do máximo êrro atingido, com o fim de ter a certeza de que a fórmula é ainda ou não aplicável com a aproximação desejada.

Vamos agora introduzir uma nova expressão para representar secções de diferentes formas numa única fórmula. Esta expressão foi empregada por Nebbia.

Consideremos uma secção de tipo qualquer para a qual seja válida a expressão:

$$\Omega = C\,h^n \qquad (35)$$

quere dizer a secção é sempre exprimível numa potência da altura, multiplicada por uma constante C. O expoente n é um parâmetro puramente numérico. O coeficiente C tem as dimensões L^{2-n}.

Esta secção, que nós chamaremos secção monómia, engloba como casos particulares as secções: rectangular para a qual $n = 1$; parabólica onde $n = {}^3/_2$ e triangular para $n = 2$.

Como observação complementar indicaremos a maneira de obter os valores de C e n no caso duma secção qualquer irregular.

Derivemos a expressão (35) em relação a h e tendo em conta que $\frac{d\Omega}{dh} = b$ teremos:

$$b = C\,n\,h^{n-1}$$

Medindo agora na secção considerada as larguras correspondentes às diversas alturas, podemos obter a curva relacionando as larguras com as alturas; se representarmos logarìtmicamente essa curva teremos:

$$\log b = \log n\,C + (n-1)\log h$$

Representando em coordenadas logarítmicas os valores de b e de h obtidos, obteremos uma recta cujo coeficiente angular será igual a $n-1$, de onde poderemos obter o valor de n. A ordenada na origem dá-nos o valor de $n\,C$, do qual podemos deduzir o valor de C, e, portanto, a representação monómia da secção.

Substituindo valores na fórmula (34) e supondo que o raio médio é proporcional à profundidade h (hipótese exacta para algumas secções e suficientemente aproximada noutras, como por exemplo na secção parabólica na qual Tolkmitt fêz uma hipótese bem mais arbitrária) obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{dh}{ds} = i\,\frac{\Omega^2 R - \Omega_u^2 R_u}{\Omega^2 R - \Omega_c^2 R_c} =$$

$$= i\,\frac{C^2 h^{2n} \times C_1 h - C^2 h_u^{2n} C_1 h_u}{C^2 h^{2n} \times C_1 h - C^2 h_c^{2n} C_1 h_c} =$$

$$\boxed{= i\,\frac{h^{2n+1} - h_u^{2n+1}}{h^{2n+1} - h_c^{2n+1}}}$$

expressão geral para tôdas as secções exprimíveis em forma monómia.

A expressão da altura crítica para o mesmo tipo de secções pode obter-se substituindo valores na expressão (15) e assim obteremos:

$$\frac{\alpha Q^2}{g}\,\frac{b_c}{\Omega_c^3} = \frac{\alpha Q^2}{g}\,\frac{C n\,h_c^{n-1}}{C^3 h_c^{3n}} = 1$$

e portanto

$$\boxed{h_c = \sqrt[2n+1]{\frac{n}{C^2}\,\frac{\alpha Q^2}{g}}} \qquad (36)$$

Vejamos agora o que é que nos fornece esta fórmula nos casos particulares das secções rectangulares, triangulares ou parabólicas, casos já estudados em separado por diversos autores.

Secção rectangular muito larga = Neste caso a hipótese que fizemos sôbre a proporcionalidade do raio médio e da altura é exactamente verificada.

Teremos

$n = 1 \quad C = b_o$ (ou largura unitária no caso de secção muito larga)

e as fórmulas serão

$$\frac{dh}{ds} = i\,\frac{h^3 - h_u^3}{h^3 - h_c^3} \quad (37) \qquad h_c = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{g}} \quad (38)$$

estas duas expressões são já nossas conhecidas. A primeira é a equação de Bresse.

Secção triangular = A hipótese sôbre o

raio médio é também exactamente verificada neste caso.

Teremos

$$n = 2$$

e portanto

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{h^5 - h_u^5}{h^5 - h_c^5} \qquad (39)$$

que é a equação obtida por Puppini para a mesma secção.

A altura crítica será dada por

$$h_c = \sqrt[5]{\frac{2}{m^2} \frac{\alpha Q^2}{g}}$$

sendo m = inclinação das margens

Secção parabólica = Devemos fazer uma advertência: Tolkmitt, que foi quem estudou êste caso particular, admite na sua dedução que o raio médio R é dado pelo quociente da secção liquida dividida pela largura da superfície livre b. Vê-se que esta é uma aproximação que poderá ocasionar um êrro bastante grande. Com a hipótese de Tolkmitt verifica-se a proporcionalidade entre o raio médio e a profundidade. A nossa hipótese é ùnicamente esta última e atribuímos ao raio médio, para determinação da sua grandeza, quando isto fôr necessário, o seu verdadeiro valor. Como vemos, estamos mais próximos da realidade do que Tolkmitt.

Na secção parabólica $n = \frac{3}{2}$ e então

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{h^4 - h_u^4}{h^4 - h_c^4} \qquad (41)$$

equação já achada por Tolkmitt. A expressão formal da equação de Tolkmitt é igual à nossa, mas nós temos a vantagem de introduzir o verdadeiro valor do raio médio nos cálculos.

A equação da secção parabólica será

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 2\,p\,h$$

sendo p o parâmetro da parábola.

Nestas condições a altura crítica é dada por

$$h_c = \sqrt[4]{\frac{27}{64\,p} \frac{\alpha Q_2}{g}} \qquad (42)$$

É talvez bom recordar que a secção liquida e o perimetro molhado da parábola são dados por:

$$\Omega = \frac{2}{3} b h$$

$$\chi = \sqrt{h^2 + \frac{p}{2} h} + \frac{p}{2} \log \text{nep.} \frac{p}{\sqrt{p^2 + 2ph} - \sqrt{2ph}}$$

Podemos, finalmente, encontrar o integral da curva de regolfo no caso duma secção trapézia.

Partindo da equação (34) e transformando temos:

$$idx = dh \frac{\Omega^2 R - \Omega_c^2 R_c}{\Omega^2 R - \Omega_u^2 R_u} = dh\left(1 + \frac{\Omega_u^2 R_u - \Omega_c^2 R_c}{\Omega^2 R - \Omega_u^2 R_u}\right)$$

e portanto

$$ix = h + (\Omega_u^2 R_u - \Omega_c^2 R_c) \int \frac{dh}{\Omega^2 R - \Omega_u^2 R_u} \qquad (43)$$

Ora no caso da secção trapézia, as expressões de Ω e R são:

$$\Omega = (b_o + mh)\,h \qquad R = \frac{(b_o + mh)\,h}{b_o + 2\sqrt{1 + m^2}\,h}$$

sendo m = inclinação da margem [1] e b_o = largura do fundo.

Observa-se imediatamente que o integral se reduz ao quociente de duas funções racionais; por outra parte o denominador tem tôdas as suas raizes iguais a h_u, e então será trabalhoso, mas não impossível, o cálculo do integral e, portanto, da forma algébrica da curva de regolfo ou superfície livre.

Encontramos, então, em forma explícita o integral da curva de regolfo no caso da secção trapézia. Poder-se-iam formar tabelas, com os resultados que se obteriam. A-pesar-de tudo não prosseguimos os cálculos e contentámo-nos com mostrar que isso era possível, e vamos já ver porque.

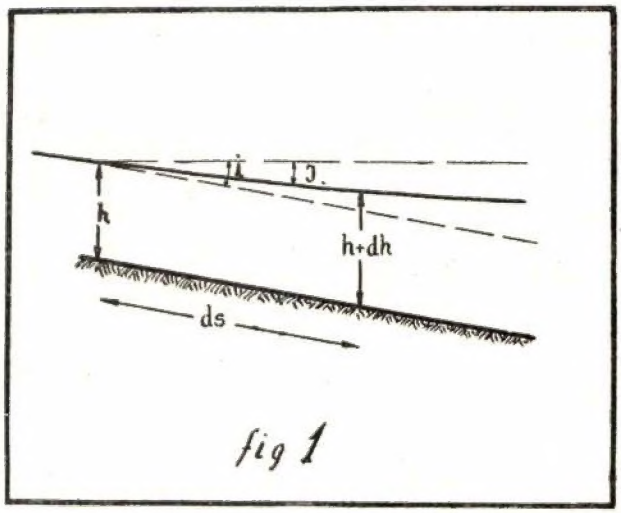
Recordemos a fórmula geral (34). A principal conseqüência do nosso estudo não é a dedução desta fórmula, já por si bastante importante, mas sim o facto de podermos, adoptando coordenadas adimensionais, obter um único

[1] $m = \frac{\text{abcissa (base)}}{\text{ordenada (altura)}}$

ábaco que nos resolva por completo o problema do regolfo para qualquer caso e qualquer secção e de forma extremamente simples, mais fácil do que a dedução de quaisquer tabelas.

Retomemos a expressão geral e transformêmo-la:

$$\frac{dh}{ds} = i\frac{\Omega^2 R - \Omega_u^2 R_u}{\Omega^2 R - \Omega_c^2 R_c} = i - i\frac{\Omega_u^2 R_u - \Omega_c^2 R_c}{\Omega^2 R - \Omega_c^2 R_c}$$



Examinemos a figura lateral. Vemos imediatamente, como aliás já sabemos da hidráulica que:

$$\frac{dh}{ds} = i - J \qquad (44)$$

Recordemos que i é a inclinação do fundo do canal e J a inclinação da superfície livre de água, ambas em relação à horizontal.

Temos então

$$J = i\frac{\Omega_u^2 R_u - \Omega_c^2 R_c}{\Omega^2 R - \Omega_c^2 R_c} \qquad (45)$$

Evidentemente, se nós conhecermos o valor de J em cada ponto, temos possibilidades de, por métodos gráficos ou analíticos, traçar imediatamente a curva do regolfo.

Mas, dividindo por $\Omega_c^2 R_c$ podemos ainda transformar a expressão (45) e obter:

$$J = i\frac{\dfrac{\Omega_u^2 R_u}{\Omega_c^2 R_c} - 1}{\dfrac{\Omega^2 R}{\Omega_c^2 R_c} - 1}$$

e chamando

$$Z = \frac{\Omega^2 R}{\Omega_c^2 R_c} \qquad (46)$$

e portanto

$$Z_u = \frac{\Omega_u^2 R_u}{\Omega_c^2 R_c}$$

teremos

$$J = i\frac{Z_u - 1}{Z - 1} = \frac{A}{Z - 1} \qquad (47)$$

donde

$$A = i(Z_u - 1) \qquad (48)$$

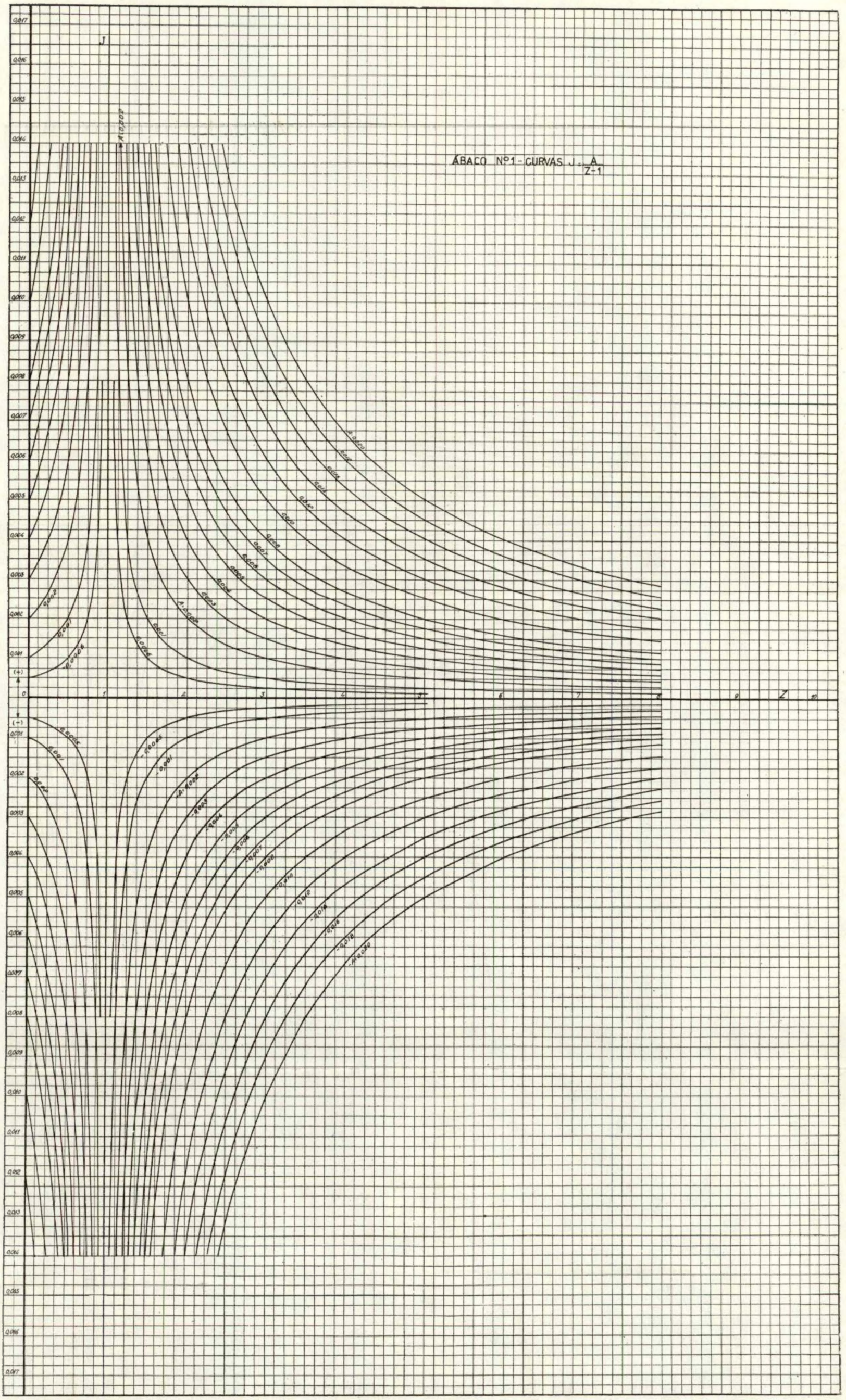
Observemos que na expressão anterior A é uma constante e que as duas variáveis adimensionais J e Z estão relacionadas entre si por uma expressão muito simples

$$J = \frac{A}{Z - 1}$$

Temos para cada valor de A, correspondendo a um caso prático, uma curva exprimindo a relação entre J e Z, isto é, entre a inclinação da superfície da água num ponto e um número que nos fornece a profundidade no mesmo ponto. Esta família de curvas é válida para todos os tipos de secções sem nenhuma limitação. Será necessário ùnicamente encontrar o valor de A correspondente ao caso que nos interessa e trabalhar sôbre a curva correspondente. Podemos evidentemente ter uma infinidade de casos práticos correspondentes ao mesmo valor do número A, que é um número sem dimensões.

Pode-se, então, construir um único ábaco para resolver o problema do regolfo em qualquer tipo de secção. Foi isto o que nós fizemos (ábaco n.º 1), escolhendo convenientemente as escalas. As curvas relacionando J e Z são hipérboles eqüiláteras, tendo A como parâmetro. As hipérboles situadas na direcção da primeira bissectriz, correspondem a valores de A positivos, isto é, a correntes lentas; àquelas que têm como eixo a direcção da segunda bissectriz correspondem às correntes rápidas e portanto a valores negativos de A.

A assíntota vertical marca o estado crítico e observa-se imediatamente que existe uma discontinuidade neste estado, no qual a inclinação J torna-se infinita. O eixo dos Z se-


ÁBACO Nº1 - CURVAS J . A/Z-1
J
Z
A=0,002
0,0005
0,001
0,0008
A=0,001
0,0004
0,0003
A=0,0008
0,0002
0,0001
A=0,0004
-0,0005
-0,001
-A=0,0008
-0,0004
-0,0003
-0,0002
-0,0001
-A=0,0004
-0,0008
-0,0006
-0,0004
-0,0002
-A=0,0002
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
(+)
(-)

para a região das inclinações J positivas da região das inclinações negativas. (Recordamos que a inclinação é tomada em relação à horizontal. É necessário também recordar que nós consideramos positiva neste caso, contràriamente ao que temos feito, uma inclinação que provoca um abaixamento da superfície da água no sentido da corrente).

Podemos ter inclinações positivas: no regime lento quando partimos de uma posição superior à crítica e no regime rápido quando partimos duma posição inferior; teremos inclinações negativas no caso contrário. Poderíamos fazer uma discussão geral do regolfo, mas não vale a pena, visto que uma discussão análoga é conhecida por todos aqueles que estudaram hidráulica, quando trataram da fórmula de Bresse (canais rectangulares muito largos).

A aplicação do nosso método implica o conhecimento, para cada caso, das características do movimento uniforme e do movimento crítico, quere dizer o conhecimento de Ω_u, R_u, Ω_c e R_c. Creio que não é necessário dizer nada a respeito do regime uniforme; no que se refere ao regime crítico, a secção e o raio médio são conhecidos uma vez conhecida a altura crítica h_c; esta pode ser encontrada aplicando as fórmulas já citadas ou no caso geral, em que não seja possível a aplicação da fórmula, adoptando um método muito simples que indicamos a seguir.

Recordemos a fórmula (15) e transformêmo-la

$$\frac{\alpha Q^2}{g}\frac{b_c}{\Omega_c^3} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{Q\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g}} = \Omega_c\sqrt{\frac{\Omega_c}{b_c}}$$

Conhecendo a secção podemos obter em função de h, como indica a figura 2, o valor de $\Omega_c\sqrt{\frac{\Omega_c}{b_c}}$. Depois sendo dado Q podemos calcular o valor de $\frac{\sqrt{\alpha}\,Q}{\sqrt{g}}$, e a ordenada para a qual a abcissa da primeira curva é igual a êste último valor fornecer-nos-á a altura crítica e conseqüentemente a secção e raio médio correspondentes. Êste método será empregado raras vezes, visto que já fornecemos valores explícitos de h_c para os casos de secções rectangulares, triangulares, parabólicas e monómias, compreendendo êste último tipo quási todos os casos possíveis na natureza.

Uma vez conhecidas as características dos movimentos uniforme e crítico, o conhecimento do valor de A é imediato, visto também ser conhecida a inclinação.

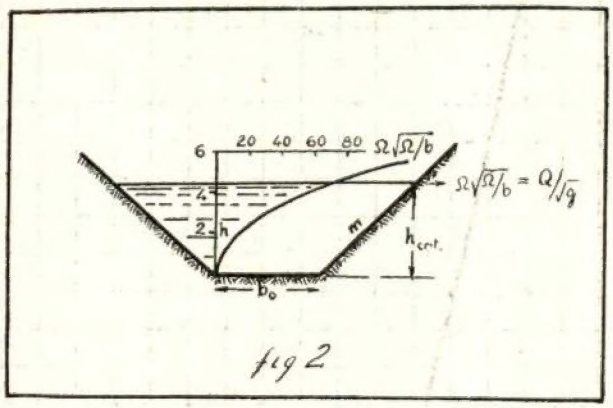


fig 2

Pode acontecer que o valor de A achado não coïncida exactamente com uma das curvas dadas no ábaco, mas tendo em conta que os valores das ordenadas das diferentes curvas são proporcionais aos respectivos valores de A, fácil será traçar uma nova curva por meio de pontos ou achar directamente por multiplicação os valores diversos de J.

Em cada caso prático teremos necessidade de conhecer uma curva que nos forneça os valores de Z em função da altura h. Ora ao calcularmos um canal possuímos geralmente um ábaco que nos fornece os valores da secção Ω e do raio médio R em função da altura, expressões necessárias para os cálculos hidráulicos. É então simples traçar a curva dos valores $\Omega^2 R$ em função da altura. A curva dos Z em função da altura é a mesma, com a única diferença que a unidade será o valor de $\Omega_c^2 R_c$, diferente de caso para caso, posto que $Z = 1$ corresponde a altura crítica.

A curva $\Omega^2 R$ depende ùnicamente da forma da secção e para facilitar o trabalho do leitor, nós traçámos algumas destas curvas para as secções mais vulgarmente empregadas. Damos a seguir alguns esclarecimentos sôbre as mesmas curvas e o seu emprêgo.

Secção rectangular muito larga=(ábaco n.º 2)

Traçámos a curva $\Omega^2 R = h^3$ em função de h; ampliou-se numa escala maior a região com alturas inferiores ao valor $h = 3$.